

Guido Mantilla Buenaño
Fernando Dávila Medina

MATEMÁTICAS FINANCIERAS EN TÉRMINOS SIMPLES



Universidad Laica
VICENTE ROCAFUERTE
de Guayaquil

Desde la
Cátedra

8



Mg. Guido Mantilla Buenaño
MBA. Fernando Dávila Medina

**MATEMÁTICAS FINANCIERAS
EN TÉRMINOS SIMPLES**

colección Desde la Cátedra

2019



Matemáticas Financieras en términos simples

Mg. Guido Mantilla Buenaño
MBA. Fernando Dávila Medina

Los autores son docentes de la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil

El libro Matemáticas Financieras en términos simples fue arbitrado por la editorial ManglarEditores (info@manglareditores.com) bajo la metodología double peer review.

De esta edición:

Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil, ULVR© 2019
Av. de las Américas # 70, frente al Cuartel Modelo
Guayaquil - Ecuador
PBX: (00-593-4) 259-6500
www.ulvr.edu.ec

Editado por:



edilaica@ulvr.edu.ec
Av. de las Américas 70, frente al Cuartel Modelo
Conmutador: (+593-4) 2596500 Ext. 195

Matemáticas Financieras en términos simples.

Primera Edición: 29 de marzo de 2019
ISBN: 978-9942-920-52-2
eISBN: 978-9942-920-51-5
Derecho de autor. GYE-010441
Tiraje: 100 ejemplares

Desde la
Cátedra

8

Clasificación JEL

C Métodos matemáticos y cuantitativos
Co Generalidades
Co2 Métodos matemáticos

Palabra Clave

Matemáticas, Finanzas, Análisis matemático.
Mathematics, Finance, Mathematical analysis

Diseño y diagramación: Ing. Claudia Morán Barco / cmoranb@ulvr.edu.ec

El contenido de este libro puede ser utilizado, citando la fuente, de acuerdo a las Normas APA 6ta. edición:

Mantilla, G. y Dávila, F. (2019). *Matemáticas Financieras en términos simples*. Guayaquil, Ecuador: Editorial ULVR.

Consejo Editorial de la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil

PhD. Aimara Rodríguez Fernández, *Rectora*

PhD. Sonia Guerra Iglesias, *Vicerrectora Académica de Investigación, Grado y Posgrado*

PhD. Rolando Villavicencio Santillán, *Vicerrector Administrativo*

PhD. Rafael Iturralde Solórzano, *Decano de la Facultad de Administración*

Mg. Marco Oramas Salcedo, *Decano de la Facultad de Ciencias Sociales y Derecho*

Mg. Georgina Hinojosa Dazza, *Decana de la Facultad de Educación*

Mg. Alex Salvatierra Espinoza, *Decano de la Facultad de Ingeniería, Industria y Construcción*

Ing. Com. Alfredo Aguilar Hinojosa, *Director del Departamento de Marketing y Relaciones Públicas*

Econ. Patricia Navarrete Zavala, *Coordinadora de la Editorial ULVR*

Queda rigurosamente prohibido, sin la autorización escrita de los titulares del Copyright, bajo las sanciones establecidas en leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

AGRADECIMIENTO

Nuestro agradecimiento siempre por las valiosas aportaciones y comentarios de:

Angel Basantes MBA.

University of Illinois, Chicago

Adolfo Montero PhD.

University of Phoenix, Phoenix

De igual manera un agradecimiento especial a la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil por la oportunidad de ejercer la cátedra y escribir este libro.

A todos los profesores que usen y recomienden el libro.

A los revisores técnicos, por su tiempo y experiencia.

A nuestros estudiantes por permitirnos compartir nuestros modestos conocimientos.

DEDICATORIA

A Dios

A nuestros padres

A nuestros estudiantes

Presentación

La formación integral de los estudiantes de la carrera de Administración de Empresas requiere de documentos académicos desarrollados por docentes con experiencia en el campo de formación de la administración, que a más de ofrecer una serie de problemas matemáticos aplicados al área financiera de las empresa, sean tratados pedagógicamente, a través de métodos de enseñanza-aprendizaje de resolución de problemas, estructurados para comprender –desde lo simple a lo complejo– los ejercicios atemporales y universales que un asignatura como Matemática Financiera propone en este libro.

En mi experiencia como docente impartiendo clases en Ingeniería Financiera, he podido evidenciar que los autores de este texto brindan un documento que tiene como objetivo garantizar el nivel de conocimientos y de competencias que requiere un profesional el día de hoy para solucionar con una elevada probabilidad de éxito, problemas cotidianos relacionados a los principios financieros.

Este libro académico trata a profundidad temas como el interés simple, el descuento simple, el interés compuesto, las anualidades, los gradientes y concluye con un capítulo de herramientas de evaluación de proyectos, centrado en decisiones basadas en el VAN y la TIR para introducir a los lectores en el análisis técnico de evaluación de inversiones.

En el texto Matemáticas Financieras en términos simples 1, tanto Mg. Guido Mantilla Buenaño como MBA. Fernando Dávila Medina, han procurado dotar al estudiante el análisis y la utilización de fórmulas matemáticas que le faciliten acceder a un mayor dominio y destreza en la asignatura, a la vez que incentivan el empleo de tecnologías en la resolución de los problemas, a través de casos prácticos, recopilados a través de su vida profesional y académica, y que pueden ser extrapolados a la cotidianidad de las actividades laborales.

Darwin Ordoñez Iturralde, Ph.D

En términos generales, las Matemáticas ofrecen un aporte formativo y práctico.

El aporte formativo permite al estudiante desarrollar cada vez con más habilidad problemas de mayor complejidad, pensar objetivamente y prepararse sobre todo en carreras de Ingeniería.

El aporte práctico permite al estudiante utilizar las Matemáticas en asuntos tan elementales como hacer una conversión entre distintas unidades – manejar distintos tipos de divisas, hacer un presupuesto para manejar sus finanzas personales, etc o en asuntos más complejos como cálculos de tasas o porcentajes de rendimientos, negociaciones internacionales, cálculos para gestión de diversos tipos de proyectos, etc.

Las Matemáticas Financieras son una herramienta útil e indispensable para cualquier profesional que se desenvuelva en el ámbito de la Administración de Empresas, Economía o carreras afines y tiene por ende un carácter muy pragmático.

La presente obra ofrece un estudio y un análisis introductorio en el ámbito de las Matemáticas Financieras. Se ha hecho hincapié a lo largo de todo el texto en ser claros, precisos y objetivos en las explicaciones dadas sin incurrir en terminología compleja y también se ha enfatizado en el título de la obra “... en términos simples“ para que el texto aporte y facilite el autoaprendizaje del estimado lector.

El libro, que incluye numerosos ejemplos resueltos en clase con alumnos así como un caso de estudio de la vida real. Está dividido en 3 partes, las cuales son: Interés Simple, Interés compuesto y Herramientas para evaluación de proyectos.

En la parte 1, Interés Simple, se tratan temas como qué es el Interés Simple y qué es el Descuento Simple.

En la parte 2, Interés Compuesto, se desarrollan temas como qué es el Interés compuesto en términos generales, qué es el Descuento Compuesto, los distintos tipos de Anualidades y los Gradientes.

En la última parte del libro, Herramientas para Evaluación de Proyectos, se ofrecen los muy utilizados conceptos del VAN y del TIR con los respectivos ejemplos ilustrativos y el análisis correspondiente.

En cada capítulo existen problemas resueltos, propuestos y preguntas de autoevaluación.

Las fórmulas han sido totalmente deducidas con la explicación respectiva. También se han incluido una gran cantidad de diagramas de tiempo, diagramas de flujo, tablas y gráficos para ser en lo posible, lo más ilustrativos.

En los Apéndices se abordan temas de Matemáticas Elementales que el estudiante debe conocer a priori como son: Progresiones Aritméticas, Progresiones Geométricas y Logaritmos. Como Apéndices también se han incluido: Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas, las Fórmulas más comunes usadas en el ámbito financiero y las Tablas de Factores de Interés Compuesto.

La bibliografía elegida ha sido variada y selecta y se ha invertido tiempo y esfuerzo para ofrecer un texto modesto pero a la vez de fácil lectura y eminentemente práctico.

Se espera contar con sus valiosos comentarios: gmantillab@ulvr.edu.ec, fdavilam@ulvr.edu.ec

Contenido Breve

Presentación	xi
Prólogo	xiii
PARTE 1: INTERES SIMPLE	
1.- Interés simple.....	23
2.- Descuento simple.....	45
PARTE 2: INTERÉS COMPUESTO	
3.- Interés Compuesto	57
4.- Descuento Compuesto	90
5.- Anualidades Ordinarias o vencidas.....	100
6.- Anualidades Anticipadas.....	128
7.- Anualidades Diferidas.....	142
8.- Perpetuidades o Rentas perpetuas.....	153
9.- Gradientes	176
PARTE 3: HERRAMIENTAS PARA EVALUACIÓN DE PROYECTOS	
10.- Valor actual Neto - VAN.....	200
11.- Tasa interna de retorno - TIR.....	207
APENDICES	
APENDICE A: Progresiones Aritméticas.....	218
APENDICE B: Progresiones Geométricas	227
APENDICE C: Logaritmos.....	237
APENDICE D: Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas	246
APENDICE E: Fórmulas usadas en Matemáticas Financieras.....	247
APENDICE F: Tablas de factores de interés compuesto	251
APENDICE G: Bibliografía	282

Presentación	xi
Prólogo	xiii

PARTE 1: INTERES SIMPLE

1. Interés simple

1.1. El interés en términos generales	23
1.1.1. Tasa de interés	24
1.1.2. El Monto o Valor Futuro	24
1.2. Interés simple VERSUS Interés compuesto	26
1.3. Fórmulas de interés simple	27
1.3.1. Fórmula para el Monto o Valor Futuro	27
1.3.2. Fórmulas para el interés	28
1.4. Regla de los 100.....	33
1.5. Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas de un mismo año.....	34
1.6. Diagramas de tiempo	36
Problemas propuestos	40
Preguntas de Autoevaluación.....	44

2. Descuento simple

2.1. Introducción	45
2.2. Nomenclatura y gráfico.....	45
2.3. Tipos de descuento simple	46
2.3.1. Descuento real simple	46
2.3.2. Descuento comercial	49
Problemas propuestos	52
Preguntas de Autoevaluación	56

PARTE 2: INTERÉS COMPUESTO

3. Interés Compuesto

3.1. Definición	57
3.2. Diagramas de Flujo de Caja	58
3.3. Deducción de la fórmula de Valor Futuro	61

3.4. Otra fórmula para Valor Futuro	61
3.5. Diferenciación entre períodos de capitalización y tiempo	62
3.6. Fórmula para el Valor Presente	64
3.7. Regla de los 72	67
3.8. Períodos de capitalización: Capitalización periódica y continua	71
3.9. Tasas de interés nominal y efectiva	73
3.9.1. Tasa de interés nominal	73
3.9.2. De qué dependen los intereses ?	74
3.9.3. Tasas de interés efectiva	79
3.9.4. Fórmulas que relacionan las tasas efectiva y nominal	79
3.9.5. Fórmula que relaciona las tasas de interés efectivas mensual y anual.....	81
3.10. Tasas equivalentes	81
Problemas propuestos	84
Preguntas de Autoevaluación	89
4. Descuento Compuesto	
4.1. Introducción	90
4.2. Nomenclatura, gráfico y fórmulas.....	91
Problemas propuestos	97
Preguntas de Autoevaluación	99
5 Anualidades Ordinarias o vencidas	
5.1. Definición de Anualidad	100
5.2 . Tipos de Anualidades	102
5.3. Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Ordinaria.....	105
5.4. Deducción de la fórmula de Valor Futuro para una Anualidad Ordinaria	109
5.5. Fórmulas y factores de interés compuesto	110
5.6. Interpolación con tablas de factores de interés compuesto.....	117
Problemas propuestos	123
Preguntas de Autoevaluación	127
6. Anualidades Anticipadas	
6.1. Definición.....	128
6.2. Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Anticipada.....	129
6.3. Deducción de la fórmula de Valor Futuro para una Anualidad Anticipada	133
Problemas propuestos	138
Preguntas de Autoevaluación	141

7. Anualidades Diferidas

7.1. Definición	142
7.2. Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Diferida	143
Problemas propuestos	149
Preguntas de Autoevaluación	152

8. Perpetuidades o Rentas perpetuas

8.1. Definición	153
8.2. Tipos de Perpetuidades	153
8.2.1. Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas	154
8.2.1.1. Deducción del Valor Presente para una Renta Perpetua Ordinaria.....	154
8.2.2. Valor Futuro de una Renta Perpetua Ordinaria	155
8.2.2. Rentas Perpetuas Anticipadas	159
8.2.2.1. Deducción del Valor Presente para una Renta Perpetua Anticipada	159
8.2.3. Rentas Perpetuas Diferidas	160
8.2.3.1 Deducción del Valor Presente de una Renta Perpetua Diferida	161
8.2.4. Rentas Perpetuas que ocurren cada cierto número de períodos	165
8.2.4.1. Valor Presente de una Perpetuidad que ocurre cada cierto núm. Períodos	165
8.3. Costo capitalizado	166
8.3.1. Método para calcular el Costo capitalizado	166
Problemas propuestos	172
Preguntas de Autoevaluación	175

9. Gradientes

9.1. Definición general	176
9.2. Tipos de gradientes	179
9.3. Gradientes Aritméticos	179
9.3.1. Deducción de la fórmula de VP para un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional.....	179
9.3.2. Anualidad de un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional	181
9.3.3 Valor Futuro de un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional	183
9.4. Gradientes Geométricos	186
9.4.1. Deducción de la fórmula de VP para un Gradiente Geométrico Uniforme	187
9.5. Gradientes diferidos	191
Problemas propuestos	195
Preguntas de Autoevaluación.....	199

PARTE 3: HERRAMIENTAS PARA EVALUACIÓN DE PROYECTOS

10. Valor actual Neto - VAN

10.1. Definición	200
Problemas propuestos	204
Preguntas de Autoevaluación	206

11. Tasa interna de retorno - TIR

11.1. Definición de la Tasa Interna de Retorno	207
11.2. Algunas consideraciones adicionales sobre la TIR	208
11.3. TIR vs VAN	209
11.4. Si el VAN y la TIR dan recomendaciones contrarias	209
Problemas propuestos	214
Preguntas de Autoevaluación	217

APENDICES

APENDICE A: Progresiones Aritméticas

A.1. Definición	218
A.2. Tipos de Progresiones Aritméticas	218
A.3. Fórmulas utilizadas en Progresiones Aritméticas	219
A.3.1. Fórmula para encontrar la razón	219
A.3.2. Deducción de la fórmula del término n-ésimo	219
A.3.3. Deducción de la fórmula para la Suma de términos	219
A.4. Aplicaciones de las Progresiones Aritméticas	224
A.5. Propiedades de las Progresiones Aritméticas	226

APENDICE B: Progresiones Geométricas

B.1. Definición	227
B.2. Tipos de Progresiones Geométricas	227
B.3. Fórmulas utilizadas en Progresiones Geométricas	228
B.3.1. Fórmula para encontrar la razón	228
B.3.2. Deducción de la fórmula del término n-ésimo	228
B.3.3. Deducción de la fórmula para la Suma de términos de una PG finita	229
B.3.4. Deducción de la fórmula para la Suma de términos de una PG infinita	230
B.3.5. Deducción de la fórmula para el Producto de términos de una PG finita	232
B.4. Aplicaciones de las Progresiones Geométricas	234
B.5. Propiedades de las Progresiones Geométricas	236

APENDICE C: Logaritmos

C.1. Definición de logaritmo	237
C.2. Propiedades de los logaritmos	238
C.3. Aplicaciones de los logaritmos	243
C.4. Antilogaritmo	244
C.4.1. Propiedades del Antilogaritmo	245
C.5. Cologaritmo	245

APENDICE D: Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas

Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas dadas	246
---	-----

APENDICE E: Fórmulas usadas en Matemáticas Financieras

Logarimos	247
Progresiones Aritméticas	247
Progresiones Geométricas	247
Interés Simple	248
Interés Compuesto	248
Interés Compuesto: Anualidades Ordinarias	249
Interés Compuesto: Anualidades Anticipadas	249
Interés Compuesto: Anualidades Diferidas	249
Interés Compuesto: Perpetuidades	249
Interés Compuesto: Gradiente Uniforme Convencional sin pago base	250
Gradiente Aritmético	250
Interés Compuesto: Serie Geométrica o escalonada	250
Gradiente Geométrico	250
Amortización Gradual	250
Amortización Constante	250

APENDICE F: Tablas de factores de interés compuesto

Tablas de factores de interés compuesto	251
---	-----

APENDICE G: Bibliografía

Referencias	282
-------------------	-----

Objetivos:

- Exponer el significado de interés en términos generales.
- Definir claramente el significado de interés simple.
- Deducir y presentar las distintas fórmulas para interés simple.
- Establecer claramente la diferencia entre interés simple y compuesto.
- Ilustrar los conceptos con ejercicios claros y prácticos.

1.1 El interés en términos generales

El interés es la manifestación del valor del dinero en el tiempo; es la diferencia entre una cantidad final de dinero y la cantidad original. Si la diferencia es nula o negativa, no hay interés. (Tarquin, 2006, p.12).

Si al transcurrir el tiempo, una cantidad inicial de dinero C , se incrementa hasta otra cantidad final M , el interés estaría dado por:

$$I = M - C \quad (1.1)$$

I : Interés ganado o pagado.

M : Monto, Valor Futuro, Cantidad debida o acumulada.

C : Capital, Valor presente o Valor actual, Inversión o cantidad en préstamo.

$$I = C * i \quad (1.2)$$

I : Interés ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente o Valor actual, Inversión o cantidad en préstamo.

i : Tasa de interés.

1.1.1 Tasa de interés

Es el interés expresado como cantidad original por unidad de tiempo. De la ecuación (1.2) podemos obtener la ecuación (1.3):

$$i = \frac{I}{C} \quad (1.3)$$

Como generalmente el interés I es menor al capital C , la tasa de interés i será menor o igual a 1; por tanto, para expresar ésta en términos de porcentaje, se estila multiplicar el cociente I/C por 100. Tendríamos entonces la fórmula (1.4):

$$i = \frac{I}{C} * 100 \quad (1.4)$$

Período de interés: I semana, I mes, I semestre, I año, ...

i : Tasa de interés.

I : Interés ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente o Valor actual, Inversión o cantidad en préstamo.

Si en un problema se considera más de un período de interés, el enunciado debe indicar si el interés a considerar es simple o compuesto.

1.1.2 El Monto o Valor Futuro

Al *Monto* o *Valor futuro* también se lo conoce como *Cantidad debida o acumulada*.

A continuación ponemos a su consideración 2 fórmulas para calcularlo:

De la ecuación (1.1):

$$M = C + I \quad (1.5)$$

Reemplazando en (1.5) la ecuación (1.2) y sacando factor común, se obtiene:

$$M = C (1 + i) \quad (1.6)$$

Ejercicio resuelto 1.1

Juan realiza una inversión de \$10000 y retira \$13500 luego de un año. Calcule:

- El interés ganado

b. La tasa de interés a la que fue sometida la inversión

$C = \$10000$ Cantidad invertida

$M = \$13500$ Cantidad acumulada

a. Interés ganado

$$I = M - C \quad (1.1)$$

$$I = \$13500 - \$10000 = \$3500$$

b. Tasa de interés

$$i = \frac{I}{C} * 100 \quad (1.4)$$

$$i = \frac{I}{C} * 100 = \frac{3500}{10000} * 100 = 35\%$$

Ejercicio resuelto 1.2

Usted solicita un préstamo de \$20500 en la Empresa donde labora y la misma le cobra \$21300 luego de un mes. Calcule:

a. El interés que le cobraron

b. La tasa de interés

$C = \$20500$ Valor del préstamo

$M = \$21300$ Cantidad acumulada

a. Interés ganado

$$I = M - C \quad (1.1)$$

$$I = \$21300 - \$20500 = \$800$$

b. Tasa de interés

$$i = \frac{I}{C} * 100 \quad (1.4)$$

$$i = \frac{I}{C} * 100 = \frac{800}{20500} * 100 = 3,9\%$$

Ejercicio resuelto 1.3

Juan Carlos planea solicitar \$15500 a un amigo para cancelárselos 1 semestre después. El amigo le cobrará un interés del 5% por dicho préstamo. Calcular:

- El interés en dólares a pagar
- Cantidad total a pagar luego de 1 semestre

$C = \$15500$ Valor del préstamo

$i = 5\%$ Tasa de interés

- El interés en dólares a pagar

$$I = C * i \quad (1.2)$$

$$I = C * i = 15500 * 5\% = \$ 775$$

- Cantidad total a pagar luego de 1 semestre

$$M = C + I \quad (1.5)$$

$$M = C + I = \$15500 + \$775 = \$16275$$

1.2 Interés simple vs. Interés compuesto

Si más de un período de interés se tiene en cuenta, el interés a considerarse puede ser:

- Interés simple.
- Interés compuesto.

Ejercicio resuelto 1.4

Considere los siguientes ejercicios.

Como usted aprecia son prácticamente *los mismos*, con la diferencia que el uno supone interés simple y el otro interés compuesto

Préstamo	\$1000	Préstamo	\$1000
Tasa de interés simple mensual	12%	Tasa de <i>interés compuesta mensual</i>	12%
Calcular el valor adeudado luego de 4 meses		Calcular el valor adeudado luego de 4 meses	

Tabla 1.1. Cálculo de Interés Simple

Período	Capital	Interés	Monto
0	1000	0	1000
1	1000	120	1120
2	1000	120	1240
3	1000	120	1360
4	1000	120	1480

En las Tablas 1.1 y 1.2 se hacen los cálculos del interés simple y compuesto con los datos de los 2 planteamientos.

Cuando se trata de un solo período de tiempo (observe la primera fila de ambas tablas), como se aprecia en las Tablas 1.1 y 1.2, no hay diferencia entre interés simple y compuesto.

Tabla 1.2. Cálculo de Interés Compuesto

Período	Capital	Interés	Monto
0	1000	0	1000
1	1000	120	1120
2	1120	134,4	1254,4
3	1254,4	150,5	1404,9
4	1404,9	168,6	1573,5

Si en un problema se considera más de un período de interés, el enunciado debe indicar si el interés a considerar es simple o compuesto.

En la Tabla 1.3 se hace una comparación de las características del Interés simple y del Interés compuesto.

Tabla 1.3 Interés simple VS Interés compuesto

Interés simple	Interés compuesto
<ul style="list-style-type: none"> Se paga y se calcula sobre un capital que permanece invariable a lo largo del tiempo. El interés obtenido en cada intervalo de tiempo es el mismo. 	<ul style="list-style-type: none"> El capital en cada intervalo de tiempo cambia. Se dice que los intereses en cada período se capitalizan, es decir, el interés pasa a formar parte del capital, y sobre este nuevo <i>capital</i> (donde se incluye el interés) se calcula el nuevo interés. Se dice entonces que se calcula un interés sobre otro interés. Luego, el valor del interés cambia período a período. Se utiliza en los créditos que otorgan los bancos.

1.3 Fórmulas de interés simple

1.3.1 Fórmula para el Monto o Valor Futuro

En la Tabla 1.4 se deduce la fórmula para el Monto o Valor Futuro

Tabla 1.4 Dedución de la fórmula para el Monto o Valor Futuro

Período	Capital	Interés	Monto
0	C	0	C
1	C	$C*i$	$C + C*i$
2	C	$C*i$	$C + 2 C*i$
3	C	$C*i$	$C + 3 C*i$
...			
n	C	$C*i$	$C + n C*i = C (1 + n* i)$

Como se observa en la Tabla 1.4:

En el período 0, se tiene un capital C . Como es el momento exacto en que se invierte el dinero, aún no se gana intereses. Por tanto, el monto queda igual a C .

En el período 1, se tiene el capital C al cual se le aplica la tasa de interés i , generando un interés de $C * i$. Por tanto, el monto que es capital más intereses sería: $C + C * i$

En el período 2, el capital sigue siendo C , se le vuelve a aplicar la tasa de interés i , y se vuelve a generar un interés $C * i$. Este interés se suma al monto del período anterior, por tanto:

$$\text{Monto}_2 = \text{Monto}_1 + \text{Interés} = C + C * i + C * i = C + 2 C * i$$

Y así sucesivamente.

En el periodo n , obtenemos la fórmula para el monto:

$$M = C (1 + n i) \quad (1.7)$$

M : Monto, Valor futuro, Cantidad debida o acumulada.

C : Capital, Valor presente, Valor actual, Inversión o Préstamo.

n : Tiempo o número de períodos.

i : Tasa de interés.

En la fórmula (1.7) hay que considerar que n e i deben estar en las mismas unidades de tiempo. Es decir:

- Si n está en días, la tasa de interés debe ser diaria.
- Si n está en meses, la tasa de interés debe ser mensual.
- Si n está en trimestres, la tasa de interés debe ser trimestral.

1.3.2 Fórmulas para el interés

De la última fila de la Tabla 1.4, tenemos:

$$M = C + C * n * i \quad (1.8)$$

Si comparamos esta fórmula con la (1.5):

$$M = C + I \quad (1.5)$$

Considerando las fórmulas 1.8 y 1.9 e igualando o comparando término a término, se aprecia que:

$$I = C * n * i \quad (1.9)$$

I : Interés en dólares ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente, Valor actual, Inversión o préstamo.

n : Tiempo o número de períodos.

i : Tasa de interés.

Nuevamente se recalca que n e i deben estar en las mismas unidades de tiempo. Es decir:

- Si $n = 5$ semestres , $i = 10\%$ interés simple semestral
- Si $n = 5$ meses , $i = 10\%$ interés simple mensual
- Si $n = 5$ años , $i = 10\%$ interés simple anual

Pero es probable que el lector haya utilizado otras fórmulas para calcular el interés simple. Muy probablemente son las que se presentan a continuación:

$$I = \frac{C * T * t}{100} \quad (1.10)$$

I : Interés en dólares ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente, Valor actual, Inversión o préstamo.

T : Tasa de interés anual (*no se divide para 100*).

t : tiempo en años.

$$I = \frac{C * T * t}{1200} \quad (1.11)$$

I : Interés en dólares ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente, Valor actual, Inversión o préstamo.

T : Tasa de interés anual (*no se divide para 100*).

t : tiempo en meses.

$$I = \frac{C * T * t}{36000} \quad (1.12)$$

I : Interés en dólares ganado o pagado.

C : Capital, Valor presente, Valor actual, Inversión o préstamo.

T : Tasa de interés anual (*no se divide para 100*).

t : tiempo en días.

Tal vez al revisar las fórmulas de interés presentadas se pregunte lo siguiente. ¿Por qué en la fórmula $I = C * n * i$ (1.9) es necesario que n e i estén en las mismas unidades de tiempo y sin embargo en estas tres últimas fórmulas (1.10, 1.11 y 1.12) aparentemente no se requiere lo mismo pues por ejemplo en $I = \frac{C * T * t}{36000}$ (1.12) la tasa de interés es anual y el tiempo está en días?

Para responder esta interrogante, se analiza la fórmula (1.12):

$$I = \frac{C * T * t}{36000} \quad (1.12)$$

La fórmula 1.12 se la puede re-escribir de la siguiente manera:

$$I = C * \left(\frac{T}{100}\right) * \left(\frac{t}{360}\right) \quad (1.13)$$

Es muy similar a la fórmula (1.9), que simplemente está escrita de otra manera.

En dicha fórmula se ha mencionado que la tasa de interés T es anual.

El tiempo t está en días y al dividir un número de días para 360 el resultado es un número de años. Por tanto:

- $\left(\frac{T}{100}\right)$ es una tasa de interés anual
- $\left(\frac{t}{360}\right)$ es un tiempo en años

Entonces si existe homogeneidad en las unidades a las que está la tasa de interés y el tiempo en las fórmulas 1.10, 1.11 y 1.12.

De la misma forma se puede analizar la fórmula 1.11:

$$I = \frac{C * T * t}{1200} \quad (1.11)$$

Ejercicio resuelto 1.5

Ignacio acude a una Institución Financiera a solicitar un préstamo de \$1000 para pagarlos 4 años después considerando una tasa de interés simple del 15% anual.

- ¿Cuánto dinero deberá pagar Ignacio luego de los 4 años?
- ¿Cuál es el interés en dólares que se paga por la deuda?

$C = \$1000$ Valor del préstamo

$i = 15\%$ anual simple

$n = 4$ años

- ¿Cuánto dinero deberá pagar Ignacio luego de los 4 años?

$$M = C(I + ni) \quad (1.7)$$

$$M = 1000(1 + 4 * 0,15) = \$1600$$

- ¿Cuál es el interés en dólares que paga por la deuda?

$$I = M - C \quad (1.1)$$

$$I = 1600 - 1000 = \$600$$

Ejercicio resuelto 1.6

¿Cuál es la tasa de interés simple anual, si con \$50500 se liquida un préstamo de \$45000 luego de 5 meses de recibido?

$M = \$50500$ Monto o Valor futuro

$C = \$45000$ Capital o Valor del préstamo

$n = 5$ meses Tiempo

$$I = M - C \quad (1.1)$$

$$I = \$50500 - \$45000 = \$5500$$

1er Método

$$I = C * n * i \quad (1.9)$$

$$5500 = 45000 * 5 * i \quad \therefore \quad 5500 = 225000 * i \quad \therefore \quad i = 0,0244 \text{ mensual}$$

$$i = 2,44\% \text{ mensual} = 29,28\% \text{ anual}$$

2do Método

$$I = \frac{C * T * t}{1200} \quad (1.11)$$

$$5500 = \frac{45000 * T * 5}{1200} \quad \therefore \quad T = \frac{5500 * 1200}{45000 * 5} = 29,3\% \text{ anual}$$

Ejercicio resuelto 1.7

¿Cuánto llegará a tener usted en su cuenta bancaria luego de 30 meses, si invierte \$ 15000 ganando el 3,7% simple anual?

$C = \$15000$ Capital o Valor de la inversión

$n = 30$ meses Tiempo

$i = 3,7\%$ simple anual Interés simple

$$M = C (1 + ni) \quad (1.7)$$

Tengamos presente que en la Fórmula 1.7, n e i deben estar en las mismas unidades de tiempo.

$$M = 15000 \left(1 + \frac{30}{12} * 0.037 \right) = \$16387,5$$

Ejercicio resuelto 1.8

¿En cuánto tiempo (años, meses, días) crece un 25% una inversión que se somete a un tasa de interés del 7% anual?.

C

$$M = C + 25\%C = 1,25C$$

$i = 7\%$ anual

$$M = C (1 + ni) \quad (1.7)$$

$$1,25 C = C (1 + 0,07 * n) \therefore 1,25 = 1 + 0,07 n \therefore n = 3,5714 \text{ años} \therefore n \approx 3 \text{ años}$$

¿meses?

$$? \text{ meses} = 0,5714 \text{ años} * \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}} = 6,8568 \text{ meses} \quad \therefore n \approx 6 \text{ meses}$$

¿días?

$$? \text{ días} = 0,8568 \text{ meses} * \frac{30 \text{ días}}{1 \text{ mes}} = 25,7 \text{ días} \quad \therefore n \approx 25 \text{ días}$$

1.4 Regla de los 100

Esta regla sirve para encontrar:

- El tiempo necesario para duplicar el valor de una inversión inicial, teniendo como dato una tasa de interés o
- La tasa de interés a la que debe ser sometido un capital para que éste duplique su valor, teniendo como dato el tiempo.

La regla de los 100 da como resultado un valor aproximado, pero con un margen de error aceptable.

Simplemente se divide:

- 100 para la tasa interés, obteniéndose el tiempo requerido para que un capital se duplique o
- 100 para el tiempo dado, obteniéndose la tasa de interés necesaria para que un capital se duplique.

Ejercicio resuelto 1.9

Encuentre el tiempo requerido para que una inversión de \$5000 duplique su valor si se somete a una tasa de interés del 3,5% mensual.

1er Método

Usando la Regla de los 100

$$100 / 3,5 = 28,57 \text{ meses}$$

2do Método

$$M = C (1 + ni) \quad (1.7)$$

$$10000 = 5000 (1 + 0,035 * n) \quad \therefore \quad 2 = 1 + 0,035 * n \quad \therefore \quad n = 28,57 \text{ meses}$$

Ejercicio resuelto 1.10

Encuentre la tasa de interés simple mensual requerida para que una inversión de \$5000 duplique su valor si se dicho capital se invierte durante 28 meses.

1er Método

Usando la Regla de los 100

$$100 / 28 = 3,57\% \text{ mensual}$$

2do Método

$$M = C (1 + ni) \quad (1.7)$$

$$10000 = 5000 (1 + 28 * i) \quad \therefore \quad 2 = 1 + 28 * i \quad \therefore \quad i = 3,57\% \text{ mensual}$$

1.5 Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas de un mismo año

Si se desea encontrar el número de días entre 2 fechas de un mismo año, considere la Figura 1.1:

Día	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Día
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	*	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

Figura 1.1

La Figura 1.1 permite calcular *directamente* el número de días entre 2 fechas de un mismo año si el año *NO* es bisiesto.

Recordemos que en un *año bisiesto* febrero tiene 29 días y no 28 como generalmente ocurre, esto hace que el año tenga 366 en lugar de 365 días. Generalmente los años bisiestos son aquellos que son divisibles para 4, por ejemplo: 2012, 2016, 2020, etc.

Si el año es bisiesto, al tener febrero 29 días, a partir del 1ro de marzo al número que acompaña a cada día de la Figura 1.1 hay que sumarle 1.

La función *días()* de Microsoft Excel permite calcular el número de días entre 2 fechas cualesquiera. El lector puede comparar los resultados presentados en los ejemplos que se ofrecen a continuación.

Ejercicio resuelto 1.11

Número de días entre 2 fechas de un mismo año si el año *NO* es bisiesto.

Se desea conocer el número de días transcurridos entre el 15 de abril del año X y el 23 de diciembre del mismo año.

Se observa en la Figura 1.1 que el 23 de diciembre es el día 357 en el año X y 15 de abril es el día 105 en el mismo año por tanto el número de días entre estas 2 fechas es la resta de las 2 cantidades (357 y 105) o sea 252 días.

Ejercicio resuelto 1.12

Número de días entre 2 fechas de un mismo año si el año es bisiesto.

Calcule el número de días entre el 10 de marzo del 2016 y el 4 de julio del mismo año.

Nota: Considere que el año 2016 es bisiesto.

En esta ocasión al ser el año bisiesto hay que sumarle 1 a cualquier número que aparece en la Figura 1.1 a partir del 1ro de marzo. Por tanto, al 4 de julio del 2016 le correspondería el número 186 y al 10 de marzo del mismo año, el número 70. Para obtener el número de días entre estas 2 fechas se resta las cantidades antes mencionadas (186 - 70) y se obtiene que entre las 2 fechas existen 116 días.

Ejercicio resuelto 1.13

Número de días entre 2 fechas de distintos años si éstos son *NO* bisiestos.

Calcule el número de días entre el 7 de junio de 2014 y el 4 de abril de 2015.

Entre el 7 de junio de 2014 y el 31 de diciembre de 2014 existen 207 días.

Entre el 1 de enero de 2015 y el 4 de abril de 2015 existen 93 días.

Pero del 31 de diciembre de 2014 al 1 enero de enero de 2015 transcurre 1 día.

Por tanto sumando las 3 cantidades tenemos que entre el 7 de junio de 2014 y el 4 de abril de 2015 existen 301 días.

1.6 Diagramas de tiempo

Los diagramas de tiempo son gráficos que ilustran cantidades de dinero que se tienen u obtienen en distintas fechas. Generalmente en ellos se detallan también el número de días. Estos diagramas son útiles generalmente para definir, entender e ilustrar claramente un problema.

Ejercicio resuelto 1.14

¿Qué cantidad de dinero debe depositarse en una Institución Financiera que paga el 3,2% simple anual el 1ro de marzo, para llegar a tener \$5500 el 2 de junio y \$9500 el 4 de septiembre?

En la figura 1.2 se ilustra el diagrama de tiempo al problema planteado.

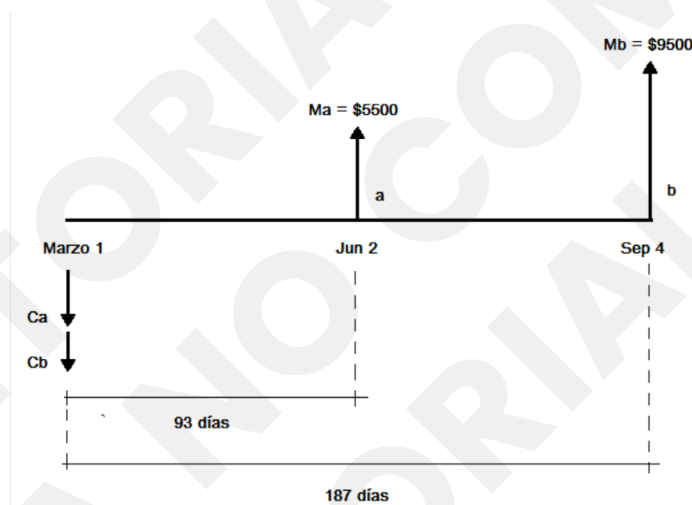


Figura 1.2

Sabemos que:

$$M = C (1 + ni) \quad (1.7)$$

Por tanto:

$$C = M (1 + ni)^{-1} \quad (1.8)$$

Sean:

C_a : Cantidad que debe invertirse el 1ro de marzo para obtener \$5500 (M_a) el 2 de junio

C_b : Cantidad que debe invertirse el 1ro de marzo para obtener \$9500 (M_b) el 4 de septiembre

Se calculan estas cantidades:

$$C_a = M_a (1 + n_a i)^{-1}$$

$$C_a = 5500 \left(1 + \frac{93}{360} * 0,032 \right)^{-1} = \$ 5454,9$$

$$C_b = M_b (1 + n_b i)^{-1}$$

$$C_b = 9500 \left(1 + \frac{187}{360} * 0,032 \right)^{-1} = \$ 9344,7$$

Por tanto la cantidad C a invertirse el 1ro de marzo es:

$$C = C_a + C_b = \$5454,9 + \$9344,7 = \$14799,6$$

Ejercicio resuelto 15

Tom deposita en un banco el 20 de diciembre \$25000. El 15 de enero del siguiente año, retira \$19000 y el 15 de abril hace otro depósito de \$30000. Asumiendo que en todas las transacciones se considera un interés simple del 10% anual y que los años en juego no son bisiestos, calcular:

- ¿De cuánto dinero puede disponer el 9 de junio?
- ¿Cuál es la cantidad que ganó por intereses?

En la figura 1.3 se ilustra el diagrama de tiempo al problema planteado

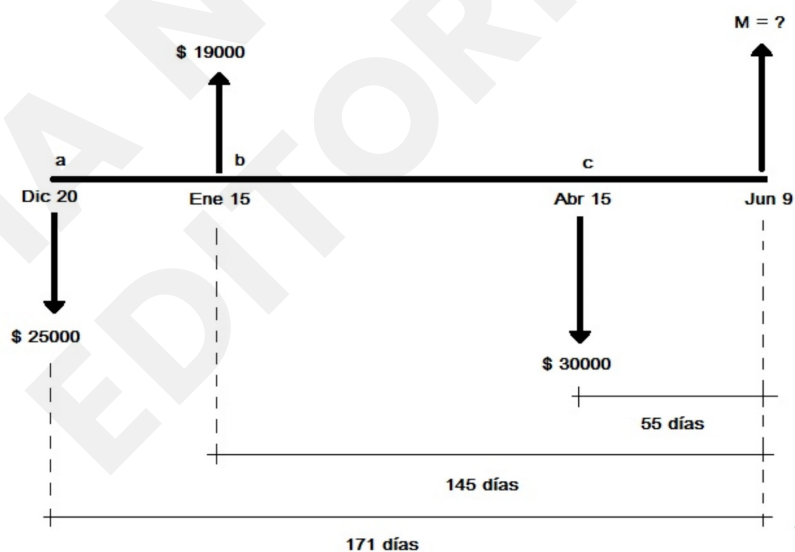


Figura 1.3

Sean:

M_a : Monto que se produce debido al depósito realizado en a (20 de diciembre)

M_b : Monto que se hubiera producido si se realizaba un depósito en b (15 de enero)

M_c : Monto que se produce debido al depósito realizado en c (15 de abril)

M : Monto que se genera el 9 de junio luego de las transacciones de depósito y retiro descritas.

a. ¿De cuánto dinero puede disponer el 9 de junio?

Para encontrar este valor, se calcularán los Montos debido a los depósitos con el Monto debido al retiro y se hará la resta de estos valores.

Montos debido a depósitos:

$$M_a = C_a (1 + n_a i)$$

$$M_a = 25000 \left(1 + \frac{171}{360} * 0,1\right) = 26187,5$$

$$M_c = C_c (1 + n_c i)$$

$$M_c = 30000 \left(1 + \frac{55}{360} * 0,1\right) = 30458,3$$

Monto que representa al retiro:

$$M_b = C_b (1 + n_b i)$$

$$M_b = 19000 \left(1 + \frac{145}{360} * 0,1\right) = 19765,3$$

$$M = M_a + M_c - M_b = \$26187,5 + \$30458,3 - \$19765,3 = \$36880,5$$

b. ¿Cuál es la cantidad que ganó por intereses?

Sea:

I : Cantidad ganada por intereses

$I = \text{Total de retiros} - \text{Total de depósitos}$

$$I = (M + \$19000) - (\$25000 + \$30000) = \$880,5$$

Ejercicio resuelto 16

Peter vende su camioneta pick up 4x4 con 10000 Km de recorrido y acuerda con el comprador el siguiente plan de pagos. El comprador debe pagar un anticipo de efectivo del 20%, luego un pago a los 6 meses que corresponde al 30% del precio del vehículo y al cumplirse el año de la venta un pago de \$15000. Considerando intereses del 14,5% simple anual, calcule:

- El precio de contado de la camioneta
- ¿Cuál es el valor que Peter recibe por intereses?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 1.4.

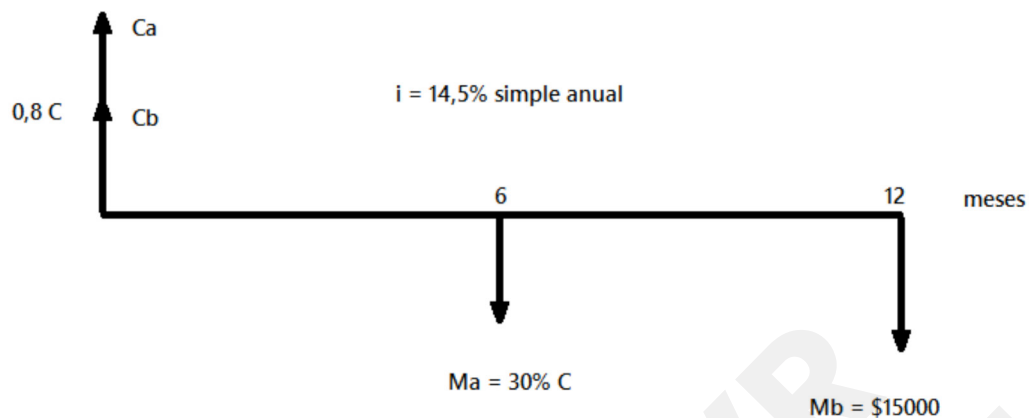


Figura 1.4

a. $C = ?$; C : Precio de contado de la camioneta pick up 4x4

De la Figura 1.4 se puede plantear la siguiente ecuación:

$$0,8 C = C_a + C_b \quad (1)$$

De la formula 1.8: $C = M (I + ni)^{-1}$

Por tanto la ecuación (1) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$0,8 C = M_a (I + n_a i)^{-1} + M_b (I + n_b i)^{-1}$$

$$0,8 C = 0,3 C \left(1 + \frac{6}{12} * 0,145\right)^{-1} + 15000 \left(1 + \frac{12}{12} * 0,145\right)^{-1}$$

$$0,8 C = 0,2797202797 C + 13100,43668$$

$$0,5202797203 C = 13100,43668$$

$$C = \$ 25179,6$$

b. $I = ?$; I : Intereses pagados por la compra de la camioneta pick up 4x4

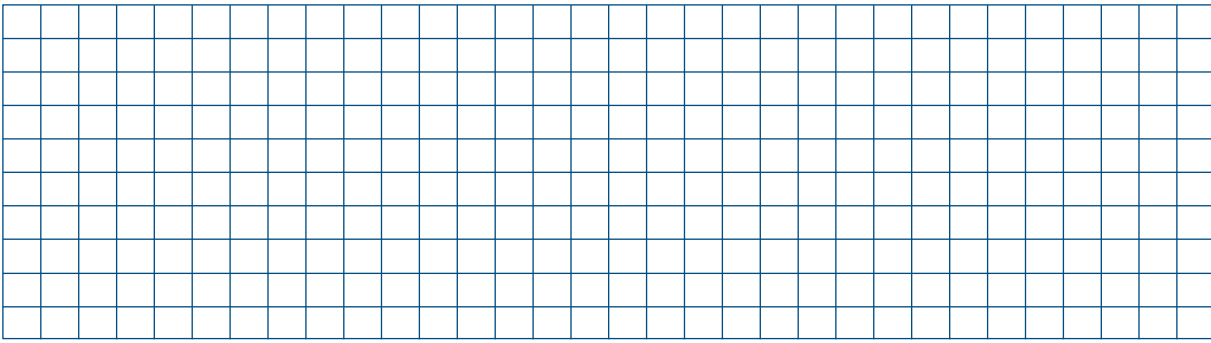
Para el cálculo de los intereses pagados se podrían plantear 2 ecuaciones:

$I =$ Suma de lo pagado – Precio de contado de la camioneta

$$I = (Anticipo + M_a + M_b) - C \quad (2)$$

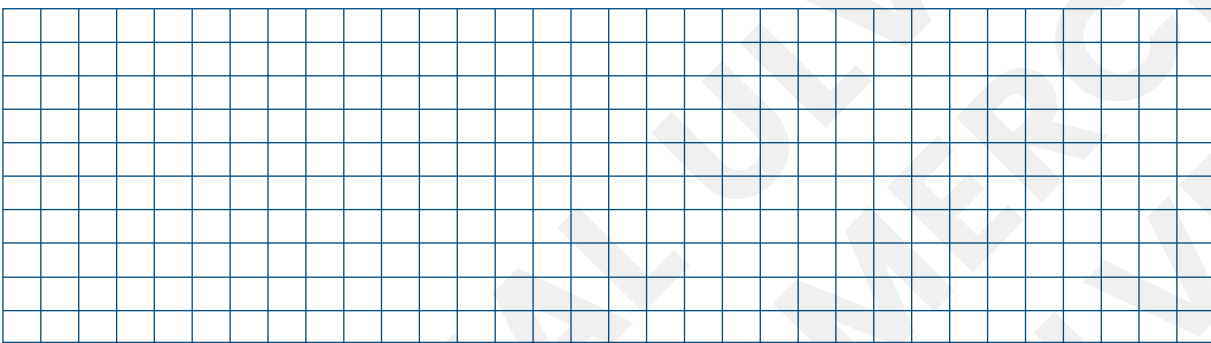
O simplemente, considerando los valores de crédito:

$$I = M_a + M_b - 0,8 C \quad (3)$$



7. ¿De qué valor fue un préstamo si se cancela \$12580 luego de 18 meses, considerando una tasa de interés del 7,5% simple anual?

R/. \$11307,86

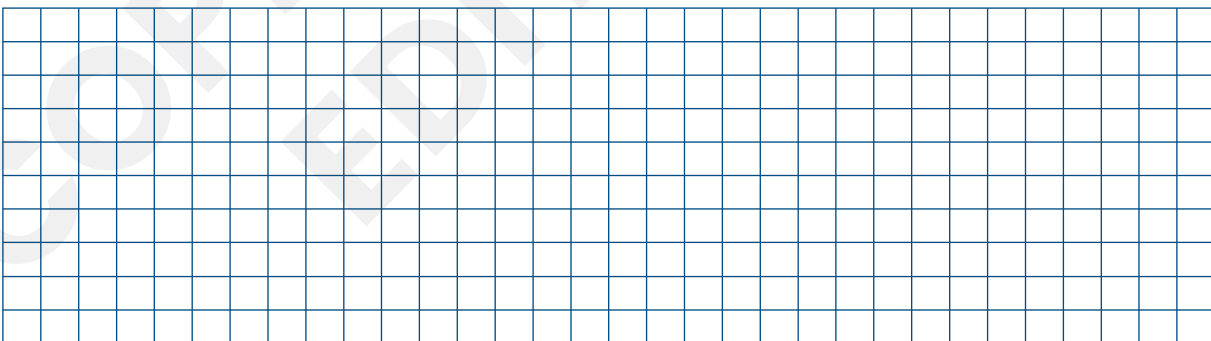


8. El padre de Robert le deja de herencia un auto usado. Robert atraviesa un percance económico y se decide por venderlo. Para esto, el 10 de enero le proponen lo siguiente:

- El interesado A, le ofrece \$5500 como cuota inicial y \$8000 el 3 de octubre.
- El interesado B, le ofrece \$7000 como cuota inicial, \$2500 el 2 de mayo y \$4500 el 5 de noviembre.

Si se tiene presente un interés del 15% simple anual, ¿cuál de las 2 ofertas se presenta más rentable para Robert?

R/. Si el interesado A, cancelara toda su oferta el 10 de enero, Robert recibiría \$12701,8 y si el interesado B, cancelara toda su oferta el 10 de enero, Robert recibiría \$13390,02, por tanto el interesado B le ofrece una mayor suma de dinero.

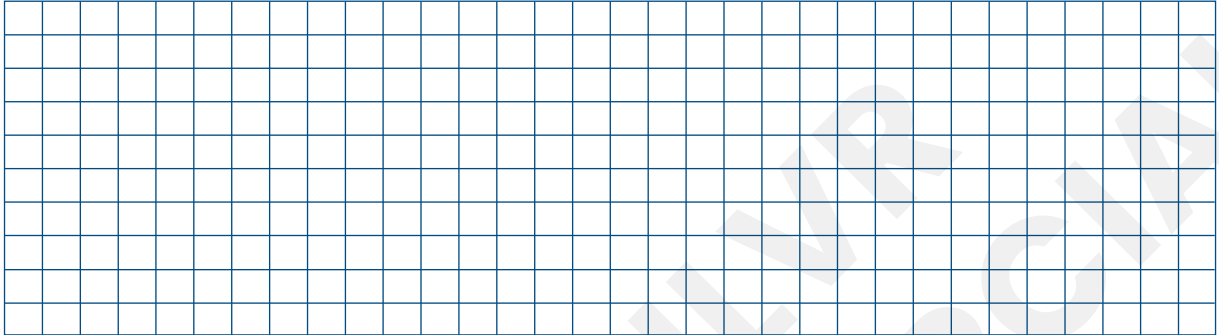


9. Calcule el número de días entre el 5 de marzo de 2020 y el 15 de abril de 2021.

Nota: considere que el año 2020 es bisiesto.

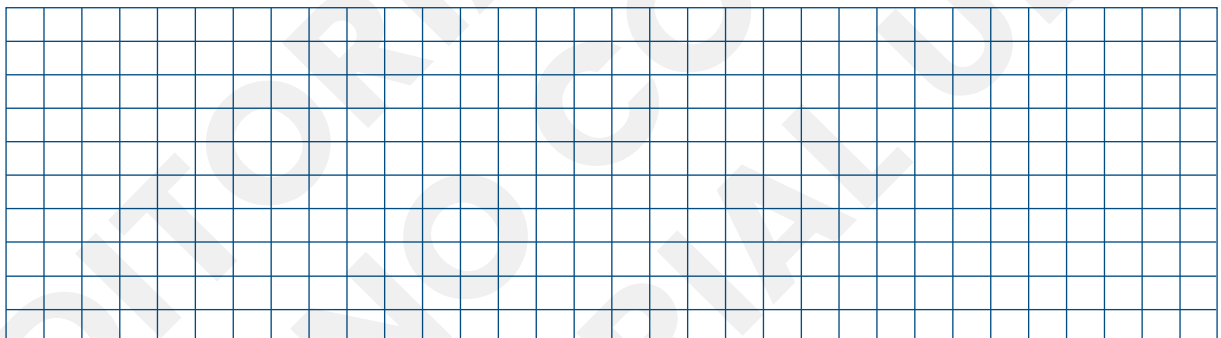
Sugerencia: Utilice la Figura 1.1 dada en el presente capítulo.

R/. 405 días.



10. ¿Qué opción es más conveniente: invertir en un depósito a plazo fijo en una Institución financiera que paga un 12% simple anual o invertir en una empresa que garantice que la inversión aumente en un 45% cada 3 años?

R/. Invertir en una empresa que garantice que la inversión aumente en un 45% cada 3 años es la opción más conveniente.



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿En términos generales qué es el interés?
2. ¿Qué entiende por interés simple?
3. ¿Cuál(es) es(son) la(s) diferencia(s) entre interés simple y compuesto?
4. En la fórmula: $M = C (1+ni)$, ¿qué condición deben cumplir n e i ?
5. En la fórmula: $I = C * T * t / 1200$, T es la tasa de interés simple anual y t es el tiempo en meses ¿porqué aparentemente T y t no están en las mismas unidades de tiempo?
6. ¿Para qué sirve la Regla de los 100? ¿En qué caso(s) se la utiliza?
7. ¿Cuántos días hay entre el 5 enero del año 2022 y el 10 de diciembre de ese mismo año? Recuerde que el 2022 no es un año bisiesto.

Sugerencia: Utilice la Figura 1.1

8. ¿Cuántos días hay entre el 10 abril del año 2024 y el 5 de diciembre de ese mismo año? Recuerde que el 2024 es un año bisiesto.

Sugerencia: Utilice la Figura 1.1

9. ¿Qué es un Diagrama de tiempo? ¿Cuál es su utilidad?

Objetivos:

- Definir claramente el significado de Descuento Simple.
- Deducir y presentar las distintas fórmulas para calcular el Descuento Simple.
- Ilustrar los conceptos anteriores con ejercicios claros y prácticos.

2.1 Introducción

Al recibir un préstamo, suele suscitarse el siguiente caso.

Alberto pide prestado \$10000 a Berta, recibiendo el dinero el 5 mayo del presente mes. Por el dinero recibido, Alberto firma un documento a Berta (por lo general, un pagaré), donde queda constancia que dicha deuda se pagará con los respectivos intereses (supongamos que el total será de \$13500) en una fecha futura, digamos el 10 de noviembre del mismo año.

Berta entregó el dinero el 5 de mayo y se queda con el pagaré firmado esperando que llegue el 10 de noviembre para cobrar el préstamo más el interés. Pero en el transcurso de este tiempo, Berta necesita efectivo porque un familiar cercano sufrió un percance inesperado, siendo lo más parecido al dinero que tiene en ese momento, el pagaré firmado por Alberto.

En su afán por conseguir efectivo, Berta, *vende* el pagaré a Luis en \$12000 el 11 de octubre del mismo año, para poder encarar los gastos de su familiar.

El día que vence el pagaré, Alberto deberá pagar ahora los \$13500 a Luis, quien ganará \$1500 con esta transacción.

A los \$1500 ($\$13500 - \12000) que ganó Luis en la transacción, toman en el ámbito comercial el nombre de *descuento*. Dicho descuento, puede ser expresado en términos de unidades monetarias o como una tasa (porcentaje).

2.2 Nomenclatura y gráfico

Se ilustra la transacción descrita anteriormente, en la Figura 2.1 sobre una línea de tiempo.

Esta figura es muy útil y representa la situación tanto en Descuento con Interés Simple como en Descuento con Interés Compuesto.

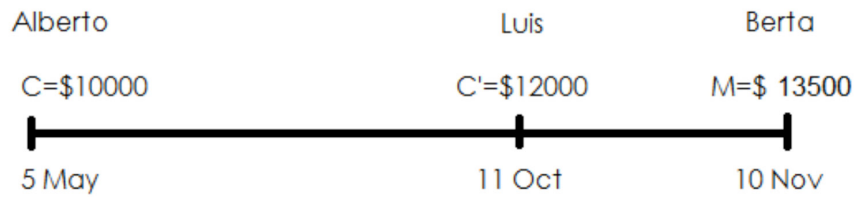


Figura 2.1

Se definen las siguientes variables que posteriormente se utilizarán en las fórmulas:

C : Valor del préstamo o crédito.

C' : Valor comercial del documento.

(Valor en el que se negocia el documento. Cantidad que se paga por un documento no vencido. Incluye un descuento).

M : Valor nominal del documento (Valor del préstamo-crédito con intereses incluidos).

2.3 Tipos de Descuento Simple

Las distintas tasas, porcentajes o valores que se dan para el descuento y la forma de calcular el mismo, dan lugar a distintos tipos de descuento. Entre ellos:

- Descuento simple real.
- Descuento comercial.
- Descuento racional o matemático.

Para cada tipo de descuento existe un grupo de fórmulas que se aplican, como se verá a continuación.

Si el problema no especifica el tipo de descuento, se asume que se trata de un descuento comercial.

2.3.1 Descuento Real Simple

Se calcula usando las fórmulas 2.1 y 2.2 que se muestran a continuación:

$$M = C' (1 + n'd) \quad (2.1)$$

M : Valor nominal del descuento (incluye intereses).

C' : Valor comercial del documento.

n' : Tiempo desde la fecha que se negoció el documento hasta que vence el documento.

d : Tasa de descuento.

n' y d deben estar en las mismas unidades de tiempo.

$$D = M - C' \quad (2.2)$$

D : Valor del descuento real simple

Ejercicio resuelto 2.1

¿En qué valor se negocia el 10 de septiembre un pagaré con vencimiento el 29 de diciembre y valor nominal de \$10000 a una tasa de descuento del 5% anual, considerando un descuento real simple?

Se ilustra el problema planteado en la Figura 2.2.

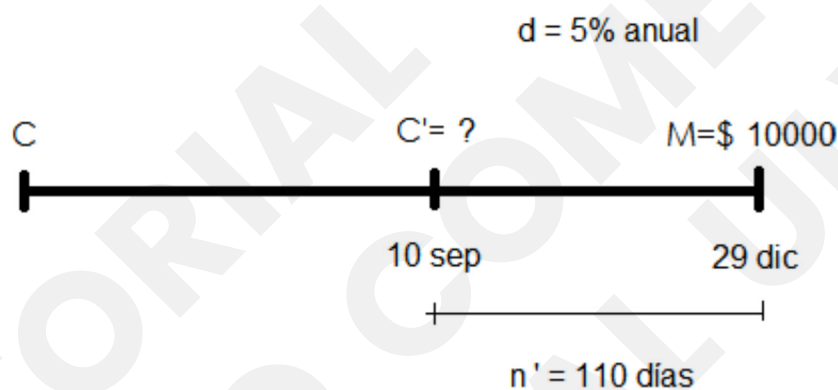


Figura 2.2

Observando la *Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas de un mismo año* (Figura 1.1), vemos que del 10 de septiembre (253) al 29 de diciembre (363) transcurren 110 días (363-253).

De la fórmula de Valor nominal (M) para Descuento Real Simple (Fórmula 2.1), despejamos el Valor comercial C' y se obtiene:

$$M = C' (1 + n'd) \quad \therefore \quad C' = M (1 + n'd)^{-1} \quad (2.3)$$

Recordemos que n' y d deben estar en las mismas unidades de tiempo. Como la tasa de descuento es anual, n' lo llevamos a años, dividiendo simplemente el número de días para 360.

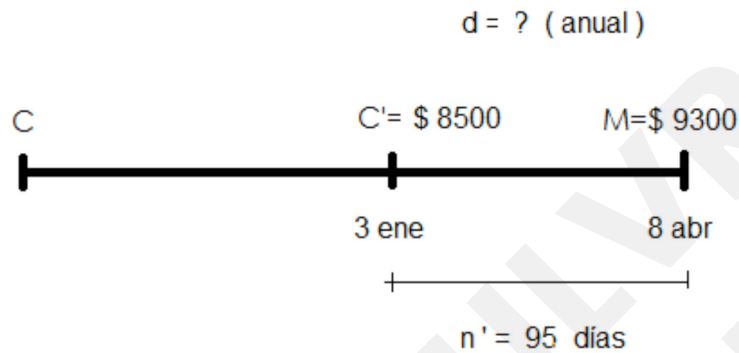
Remplazando los datos en la ecuación (2.3):

$$C' = M (1 + n'd)^{-1} = 10000 (1 + 110 / 360 * 0,05)^{-1} = \$9849,52$$

Ejercicio resuelto 2.2

Calcule la tasa de descuento simple real anual involucrada en una transacción comercial en la cual se vende un documento el 3 de enero en \$8500, el cual vence el 8 de abril. Considere que el documento tiene un valor nominal de \$9300.

Se ilustra el problema planteado en la Figura 2.3 mediante un diagrama de tiempo.



Observando la *Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas de un mismo año* (Figura 1.1), vemos que del 3 de enero (3) al 8 de abril (98) transcurren 95 días (98-3).

Se parte de la fórmula de Valor nominal (M) para calcular el Descuento Real Simple (Fórmula 2.1) y reemplazamos los datos teniendo presente que n' y d deben estar en las mismas unidades de tiempo. Como la tasa de descuento la queremos anual, n' la llevamos a años, dividiendo el número de días para 360.

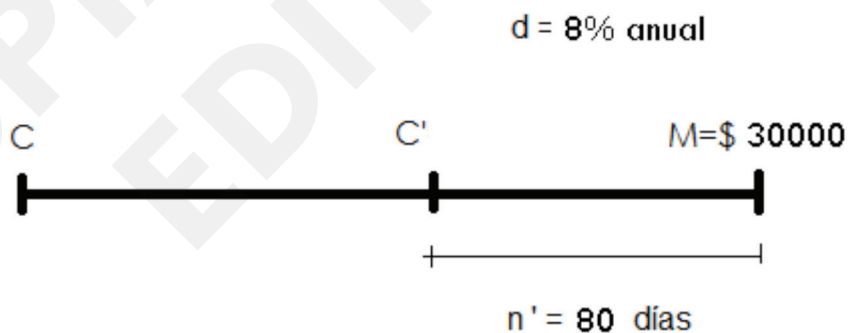
$$M = C' (1 + n'd) \quad \therefore 9300 = 8500 (1 + 95 / 360 * d) \quad \therefore 1,0941176 = 1 + 95 / 360 d$$

$$0,0941176 = 95 / 360 d \quad \therefore d = 0,3566 \quad \therefore d = 35,67\% \text{ anual}$$

Ejercicio resuelto 2.3

Encuentre el Descuento Simple Real 80 días antes del vencimiento de un documento cuyo Valor nominal es de \$30000, considerando una tasa de descuento de 8% simple anual.

Se ilustra el problema planteado en la Figura 2.4 mediante un diagrama de tiempo.



De la Fórmula 2.2, se sabe que:

$$D = M - C'; \quad C' = ?$$

Por tanto, calculamos C' para luego reemplazar su valor en la fórmula 2.2. Partimos para esto de la Fórmula 2.1 y despejamos C' :

$$M = C' (1 + n'd) \quad \therefore \quad C' = M (1 + n'd)^{-1} \quad (2.3)$$

Tengamos presente una vez más que n' y d deben estar en las mismas unidades de tiempo. Como d es anual, n' la llevamos a años dividiendo el número de días para 360. Luego se reemplazan dichos datos en la Fórmula (2.3) anteriormente escrita.

$$C' = M (1 + n'd)^{-1} = 30000 (1 + 80 / 360 * 0,08)^{-1} = 29475,98$$

Reemplazando el valor de C' en la Fórmula 2.2:

$$D = M - C' \quad (2.2)$$

$$D = M - C' = 30000 - 29475,98 = \$524,02$$

2.3.2 Descuento Comercial

Se calcula usando las fórmulas 2.4, 2.5 y 2.6 que se muestran a continuación:

$$D = M n' d \quad (2.4)$$

D : Descuento comercial.

M : Valor nominal del documento (préstamo + intereses).

n' : Plazo en años.

d : Tasa de descuento simple anual.

$$C' = M - D \quad (2.5)$$

$$C' = M (1 - n'd) \quad (2.6)$$

C' : Valor comercial o valor descontado del documento.

Si el problema no especifica el tipo de descuento, se asume que se trata de un descuento comercial.

Ejercicio resuelto 2.4

Calcule el Descuento comercial y el Valor comercial de un documento cuyo valor nominal es \$90500, 4 meses y medio antes de su vencimiento con un descuento del 10% simple anual.

Se ilustra el problema planteado en la Figura 2.5 mediante un diagrama de tiempo.

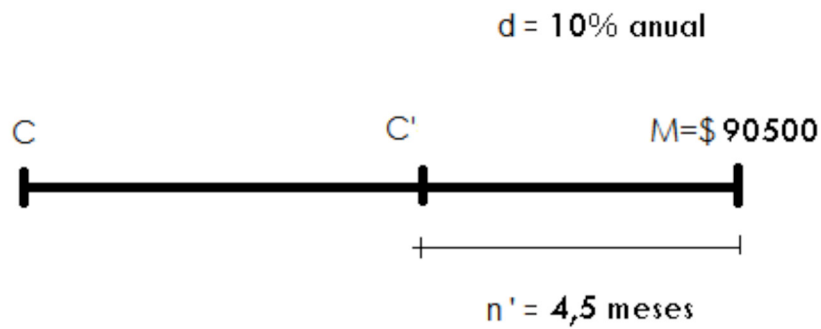


Figura 2.5

Para calcular el Descuento comercial se puede usar la fórmula 2.4, $D = M n' d$, teniendo presente que n' y d deben estar en las mismas unidades de tiempo. Para esto transformamos los meses en años dividiéndolos simplemente para 12.

$$D = M n' d$$

$$D = 90500 * 4,5 / 12 * 0,1 = \$3393,75$$

Para calcular el Valor comercial o descontado del documento se puede usar la fórmula 2.5:

$$C' = M - D = 90500 - 3393,75 = \$87106,25$$

Ejercicio resuelto 2.5

Asuma que usted recibe un préstamo de \$30000 el 29 de enero, el cual promete pagarlo con interés simple del 11% anual mediante la firma de un documento que vence el 3 de agosto. Su acreedor vende por necesidad dicho documento el 20 de mayo. Calcule en cuánto fue negociado – vendido el documento si la tasa de descuento es del 9% simple anual.

Se ilustra el problema planteado en la Figura 2.6

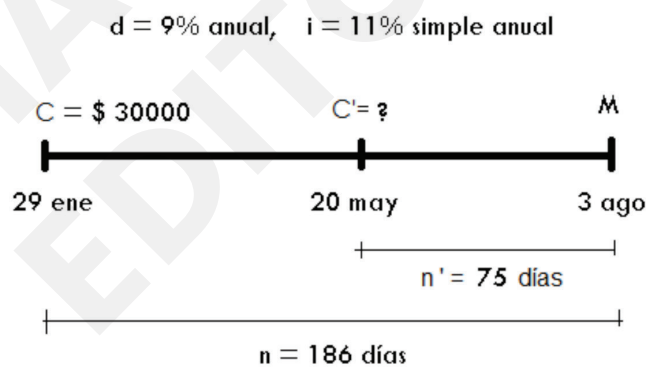


Figura 2.6

Para calcular C' , podemos partir de la fórmula 2.6, esto es: $C' = M (1 - n'd)$

De dicha fórmula tenemos todos los datos excepto el Valor nominal M .

Por tanto, podríamos abordar el problema calculando el Valor nominal con la fórmula 1.7: $M = C (1 + n i)$, teniendo presente que n e i deben estar en las mismas unidades de tiempo.

$$M = C (1 + n i) \quad (1.7)$$

$$M = 30000 * (1 + 186 / 360 * 0,11) = \$31705$$

Ahora se puede calcular C' con la fórmula 2.6 como se había manifestado:

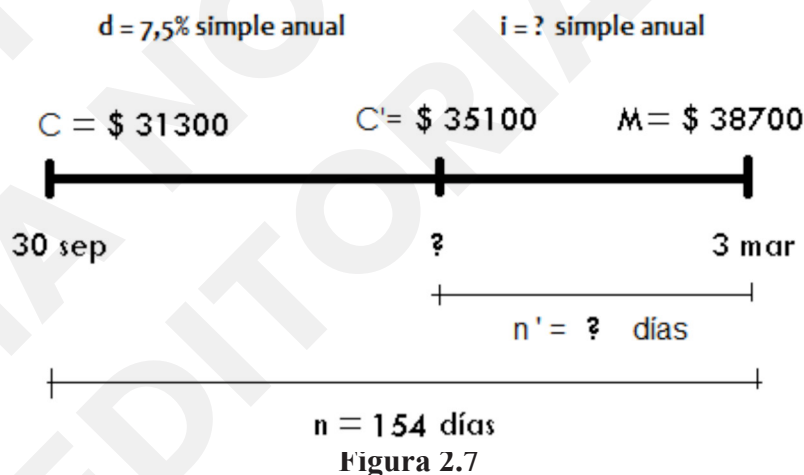
$$C' = M (1 - n'd) \quad (2.6)$$

$$C' = 31705 (1 - 75 / 360 * 0,09) = \$31110,53$$

Ejercicio resuelto 2.6

Se le aprueba un crédito por \$31300 el 30 de septiembre y por el mismo usted firma un pagaré en el que se indica como fecha de vencimiento el 3 de marzo por un Valor nominal de \$38700. Si el documento se negocia en \$35100 con una Tasa de descuento del 7,5% simple anual, calcule:

- La tasa de interés simple anual.
- La fecha en que se negoció el documento.



a. Interés simple anual

Podríamos calcular la tasa de interés con la fórmula 1.7: $M = C (1 + n i)$, teniendo presente que n e i deben estar en las mismas unidades de tiempo.

$$M = C (1 + n i) \quad (1.7)$$

$$38700 = 31300 (1 + 154 / 360 * i) \quad \therefore \quad 1,2364 = 1 + 154 / 360 * i$$

$$0,2364 = 154 / 360 * i \quad \therefore \quad i = 0,5526 \quad \therefore \quad i = 55,26\% \text{ simple anual}$$

b. Fecha en que se negoció el documento

Para encontrar esta fecha, primero se calcula el número de días antes de la fecha de vencimiento en que se negoció el documento, para esto se puede usar la fórmula 2.6. Como la Tasa de descuento que se la da anual, el tiempo a calcular, n' , se lo obtiene en años:

$$C' = M (1 - n'd) \quad (2.6)$$

$$35100 = 38700 (1 - 0,4 n') \quad \therefore \quad n' = 0,23255 \text{ años} * 360 \text{ días} / 1 \text{ año} = 84 \text{ días}$$

Del 31 de diciembre al 3 de marzo hay 62 días.

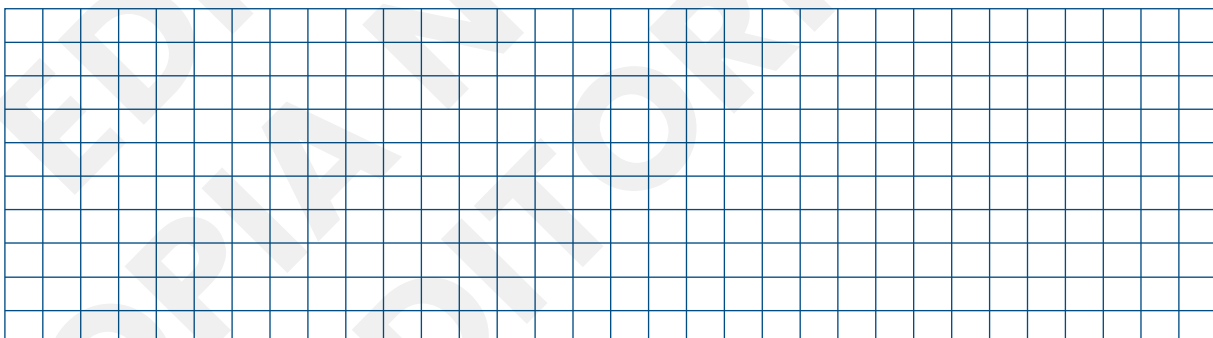
Por tanto del 31 de diciembre hay que calcular 22 días antes ($84 - 62$ días). Lo cual se plantea como una ecuación:

$$365 - x = 22 \quad \therefore \quad x = 343 \quad \rightarrow \quad 9 \text{ de diciembre}$$

Problemas propuestos

1. Se desea vender en este momento un pagaré que estipula el cobro de €1800 con vencimiento luego de 36 meses con una tasa de descuento simple anual del 10%. El valor del pagaré abarca un 8% de interés simple mensual. Determinar el Capital inicial, el Valor Comercial del documento y el Descuento asociado a la transacción.

$$R/. C = €463,91; C' = €1260; D = €540$$



2. ¿En qué valor se negocia el 10 de enero un pagaré con vencimiento el 4 de abril y valor nominal de \$15000 a una tasa de descuento del 7% anual, considerando un descuento real simple?

$$R/. C' = \$14758,9$$

Preguntas de Autoevaluación

1. En términos generales, ¿a qué se refiere el término Descuento en el ámbito comercial?
2. Represente en un diagrama de tiempo una transacción ficticia que conlleve Descuento Simple.
3. ¿Cuántos tipos de Descuento Simple existen? ¿Cuáles son?
4. Explique brevemente las diferencias entre los distintos tipos de Descuento Simple.
5. En la fórmula: $M = C' (1+n'd)$ de Descuento Real Simple, indique el significado de las variables que acompañan a dicha nomenclatura.
6. En la fórmula: $D = M n' d$ de Descuento Comercial, indique el significado de las variables que acompañan a dicha nomenclatura.
7. En Descuento en términos generales, ¿a qué se refiere el término Valor Nominal de un documento?
8. En Descuento en términos generales, ¿a qué se refiere el término Valor descontado de un documento?
9. Dibuje un diagrama de tiempo que ilustre el siguiente caso con los respectivos datos asociados:

Aurora le pide prestado \$35000 a Zulay. Zulay se los proporciona el 15 de abril de 2020 y pactan por medio de un pagaré que Aurora los devolverá con los respectivos intereses el 3 de mayo de 2022. Para dicho pago, se asocia un interés simple anual del 10%. En el transcurrir del 2021, específicamente en enero Zulay requiere de efectivo porque atraviesa una calamidad doméstica, de tal manera que comercializa el pagaré el 5 de febrero de ese año a \$37500 a Juan José.

Objetivos:

- Definir el interés compuesto y establecer la diferencia con el interés simple.
- Introducir el uso de los Diagramas de Flujo de Caja (DFC) en problemas de Matemáticas Financieras.
- Presentar ciertos conceptos de interés compuesto como son: períodos de capitalización y tiempo, tasas nominales y efectivas, capitalización continua y periódica.
- Deducir algunas fórmulas que utilizan interés compuesto como por ejemplo: Valor Presente, Valor Futuro.
- Iniciar al lector en el uso de problemas con Interés Compuesto a partir de este capítulo.

3.1 Definición

Se puede definir al interés compuesto como aquel interés que se cobra o se paga calculado sobre un capital que a su vez ya tiene sumado o capitalizado un interés previo.

Recordemos la diferenciación que hicimos en el capítulo 1 entre interés simple e interés compuesto.

Para que la definición anterior sea más ilustrativa, considere el siguiente par de ejemplos. Como usted aprecia son prácticamente “los mismos”, sino que el uno utiliza interés simple y el otro interés compuesto.

Préstamo	\$ 1510	Préstamo	\$ 1510
Tasa de <u>interés simple mensual</u>	10%	Tasa de <u>interés compuesta mensual</u>	10%
Calcular el valor adeudado luego de 4 meses		Calcular el valor adeudado luego de 4 meses	

En las Tablas 3.1 y 3.2 se hacen los cálculos respectivos considerando los datos de los 2 planteamientos.

Tabla 3.1: Cálculo de Interés Simple

Período	Capital	Interés	Monto
0	1510	0	1510
1	1510	151	1661
2	1510	151	1812
3	1510	151	1963
4	1510	151	2114

Tabla 3.2: Cálculo de Interés Compuesto

Período	Capital	Interés	Monto
0	1510	0	1510
1	1510	151	1661
2	1661	166.1	1827.1
3	1827.1	182.7	2009.8
4	2009.8	200.9	2210.7

Cuando se trata de 1 sólo período de tiempo como se aprecia en las Tablas 3.1 y 3.2, no hay diferencia entre interés simple y compuesto, los valores calculados son los mismos.

Luego se ofrece una comparación entre el interés simple y el interés compuesto en la Tabla 1.3 con las respectivas conclusiones.

3.2 Diagramas de Flujo de Caja

Es muy ilustrativo representar el enunciado de un problema con cálculos de valor del dinero en el tiempo con Diagramas de Flujo de Caja (DFC de aquí en adelante).

Un DFC está formado por:

- Una línea horizontal, que representa el tiempo. Dicha línea está subdividida en segmentos iguales de tiempo, conocidos como períodos de pago o de capitalización.
- Flechas dirigidas hacia arriba o hacia abajo, que representan a su vez cifras positivas-negativas o dinero recibido-pagado.

En este libro se usará la siguiente convención:

- Flecha hacia arriba, cifra positiva, dinero recibido.
- Flecha hacia abajo, cifra negativa, dinero pagado.

El sentido de las flechas también depende del punto de vista o de quién está haciendo el diagrama. En un préstamo por ejemplo, inicialmente es:

- Positivo para el prestatario (deudor).
- Negativo para el prestamista (quien da dinero a préstamo).

A continuación se presentan varios ejemplos.

Ejercicio resuelto 3.1

Juan Carlos pide un préstamo de \$ 10000 a un Banco y promete pagarlo en 4 pagos mensuales de \$ 3019,21 si se considera una tasa de interés mensual compuesta del 8%.

Ilustre este enunciado con un DFC.

- DFC desde el punto de vista del prestatario (Deudor - Juan Carlos):

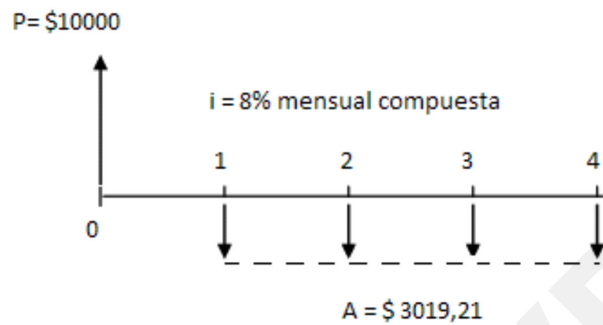


Figura 3.1

- DFC desde el punto de vista del prestamista (Acreedor - Banco):

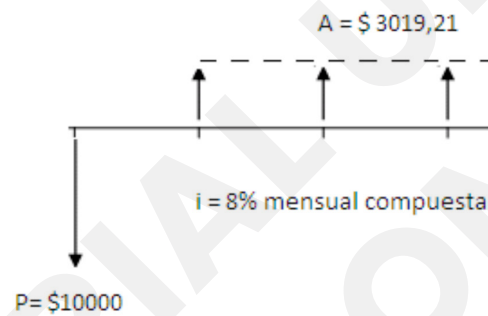


Figura 3.2

La variable A, representa una Anualidad; tema que será tratado en capítulos posteriores.

Ejercicio resuelto 3.2

Un inversionista deposita \$20000 en una Institución financiera para luego recibir 6 rentas anuales de \$ 3940,35 considerando una tasa de interés del 5% anual compuesto.

Ilustre este enunciado con un DFC.

- DFC desde el punto de vista del inversionista:

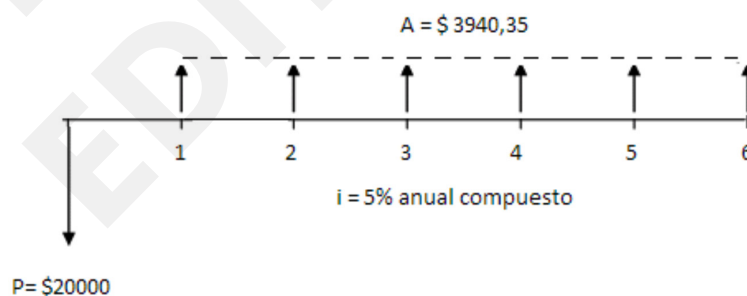


Figura 3.3

- DFC desde el punto de vista de la Institución financiera:

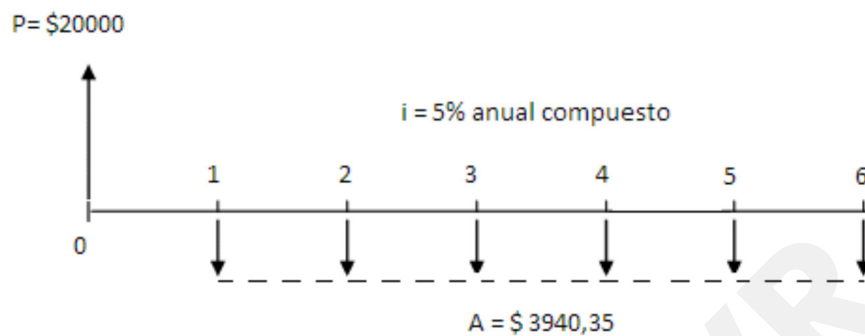


Figura 3.4

La variable A, representa una Anualidad; tema que será tratado en capítulos posteriores.

Ejercicio resuelto 3.3

Un concesionario automotriz compra un nuevo compresor de aire en \$ 3100. Se estima que los ingresos anuales que producirá el compresor serán de \$ 400. El 1er año se gastará \$ 80 en mantenimiento y éste gasto aumentará anualmente en \$ 20.

El concesionario venderá el compresor por un valor residual (valor de rescate o valor de salvamento) de \$ 300 en el 5to año.

Ilustre este enunciado con un DFC.

En la Tabla 3.3 se presentan de los ingresos y gastos anuales con el flujo neto respectivo.

Tabla 3.3: Ingresos y gastos anuales con el Flujo de Caja Neto

Fin de año	Ingresos	Gastos	Flujo de Caja Neto
0		3100	-3100
1	400	80	320
2	400	100	300
3	400	120	280
4	400	140	260
5	400 + 300	160	540

Desde el punto de vista del Concesionario, dibujamos el DFC respectivo (Figura 3.5):

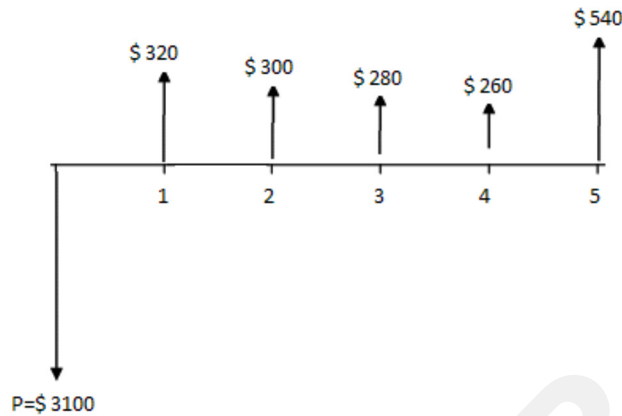


Figura 3.5

3.3 Deducción de la fórmula de Valor Futuro

La deducción de la fórmula de Valor Futuro (Monto o Cantidad debida o acumulada) se realizará en la Tabla 3.4, utilizando el mismo procedimiento que fue ilustrado en la definición (Sección 3.1), considerando las siguientes variables:

- F : Valor Futuro, Monto, Cantidad debida o acumulada.
- P : Valor presente o Valor actual, capital, inversión o valor de préstamo.
- i : Tasa de interés compuesta.
- n : Número de periodos de capitalización (“tiempo”).

Tabla 3.4: Deducción de la fórmula del Valor Futuro

Periodo	Capital	Interés	Monto
0	P	—	P
1	P	Pi	$P + Pi = P(1 + i)^1$
2	$P(1 + i)$	$P(1 + i) i$	$P(1 + i) + P(1 + i) i = P(1 + i)^2$
3	$P(1 + i)^2$	$P(1 + i)^2 i$	$P(1 + i)^2 + P(1 + i)^2 i = P(1 + i)^3$
4	$P(1 + i)^3$	$P(1 + i)^3 i$	$P(1 + i)^3 + P(1 + i)^3 i = P(1 + i)^4$
...
n	$P(1 + i)^{n-1}$	$P(1 + i)^{n-1} i$	$F = P(1 + i)^n$ (3.1)

3.4 Otra fórmula para Valor Futuro

Algunos autores para ser más explícitos al reemplazar los datos en la fórmula de Valor Futuro, prefieren utilizar la siguiente fórmula:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{mp} \quad (3.2)$$

En la fórmula 3.2:

F : Valor futuro, Monto, Cantidad debida o acumulada

P : Valor Presente o Valor Actual, Capital, inversión o valor de préstamo

i : Tasa de interés compuesta

m : Plazo en años

p : Frecuencia de capitalización

Se considera que la fórmula 3.2 es útil principalmente cuando:

- Se da la tasa de interés en términos nominales (Ver Sección 3.9).
- Se pide calcular tasa de interés nominal.
- Hay que calcular tasas equivalentes.

En todo caso, las 2 fórmulas (3.1) y (3.2) son prácticamente las mismas y darán los mismos resultados como veremos en los ejemplos siguientes.

$$F = P(1 + i)^n$$

(3.1)

≡

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{mp}$$

(3.2)

3.5 Diferenciación entre períodos de capitalización y tiempo

En la fórmula (3.1) hay que dejar en claro que n representa el número de períodos de capitalización, que no es lo mismo que tiempo.

Para ilustrar esta diferencia asumamos que se invierte un capital de \$ 100. Se desea saber, cuánto dinero se llegará a acumular luego de 50 días si la capitalización es cada 10 días y la tasa de interés compuesta es del 10%. Los cálculos requeridos para calcular el Monto se realizan en la Tabla 3.5.

En este caso existen 5 períodos.

Tabla 3.5: Cálculos requeridos para calcular el Monto
(Capital \$100, $i = 10\%$)

Período	Capital	Interés	Monto
0	100	-	100
1	100	10	110
2	110	11	121
3	121	12,1	133.1
4	133.1	13.31	146.41
5	146.41	14.64	161.05

Como entre período y período transcurren 10 días, en los 5 períodos han transcurrido 50 días.

En este caso, el tiempo (50 días) no coincide con el número de períodos (5).

Se pudo haber resumido los cálculos de la Tabla 3.5 usando la fórmula 3.1 de la siguiente manera:

$$F = P (1 + i) ^ n$$

$$F = 100 (1 + 0,1) ^ 5 = \$ 161,05$$

Como se puede apreciar, $n = 5$ *períodos de capitalización* en la fórmula 3.1

Ahora supongamos que se invierte un capital de \$ 200. Se desea saber, cuánto dinero se llegará a acumular luego de 4 meses si la capitalización es mensual y la tasa de interés compuesta es del 10%. Los cálculos se muestran en la Tabla 3.6.

Tabla 3.6: Cálculos requeridos para calcular el Monto (Capital \$200, $i = 10\%$)

Período	Capital	Interés	Monto
0	200	-	200
1	200	20	220
2	220	22	242
3	242	24.2	266.2
4	266.2	26.62	292.82

En este caso existen 4 períodos.

Como entre período y período transcurre 1 mes, en los 4 períodos han transcurrido 4 meses.

En este caso, el tiempo (4 meses) coincide con el número de períodos (4).

Se pudo haber resumido los cálculos de la Tabla 3.6 usando la fórmula 3.1 de la siguiente manera:

$$F = P (1 + i) ^ n$$

$$F = 200 (1 + 0,1) ^ 4 = \$ 292,82$$

Como se puede apreciar, esta vez, $n = 4$ *períodos de capitalización* en la fórmula 3.1

Sin embargo el lector se preguntará que existen problemas en que se pide el tiempo (en años, meses y días) necesario para que una suma 1000 llegue a convertirse en 1500 a una tasa de interés compuesta. En tal caso en la fórmula (3.1) se considera n como *tiempo* porque *se asume que el número de períodos de capitalización coincide con el tiempo*.

3.6 Fórmula para el Valor Presente

De la fórmula (3.1): $F = P (1+i)^n$, podemos despejar P y tenemos:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = F (1+i)^{-n} \quad (3.3)$$

Para la tasa de interés i y el número de períodos n , no se requiere tener despejada una fórmula. Se partirá de la fórmula (3.1) $F = P (1+i)^n$ y se despejará i o n según se requiera como lo muestran los ejemplos a continuación.

Ejercicio resuelto 3.4

Calcule el valor a pagar por un préstamo de \$ 10000 si le cobran una tasa del 10% anual luego de 3 años.

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.6).

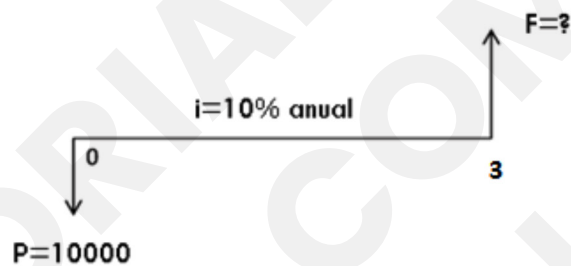


Figura 3.6

1er Método

Usando la fórmula (3.1):

$$F = P (1+i)^n$$

$$F = 10000 (1+0,1)^3 = \$ 13310$$

2do Método

Usando la tabla 3.7

Tabla 3.7: Cálculos requeridos para calcular el Monto si
 $P=\$10000$, $i=10\%$, $n=3$ años

Período	Capital	Interés	Monto
0	10000	0	10000
1	10000	1000	11000
2	11000	1100	12100
3	12100	1210	13310

Ejercicio resuelto 3.5

Calcule el capital que se prestó si un préstamo se cancela con \$ 30700 luego de 2 años si se cobró una tasa de interés del 8% anual compuesta.

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.7).

$$P = F (1+i)^{-n} \quad (3.3)$$

$$P = 30700 (1+0,08)^{-2} = \$ 26320,3$$

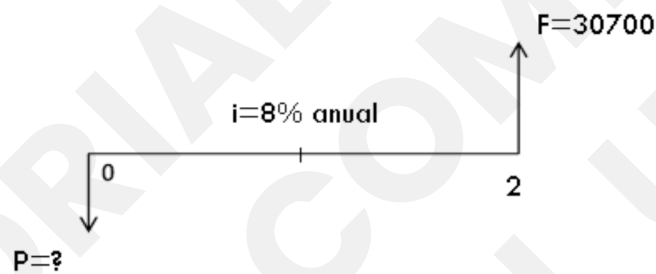


Figura 3.7

Ejercicio resuelto 3.6

Calcule la tasa de interés anual compuesta que se involucró en el préstamo de un capital de \$ 26320,3 si el mismo se canceló con \$ 30700 luego de 2 años.

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.8).

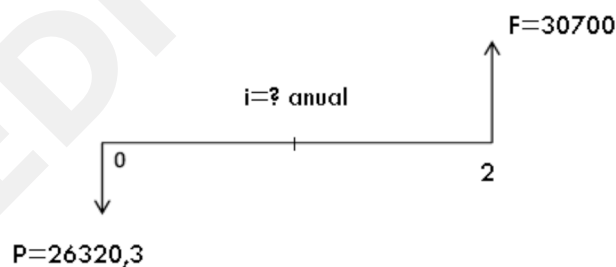


Figura 3.8

Se parte de la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n$$

$$30700 = 26320,3(1+i)^2 \quad \therefore \quad \frac{30700}{26320,3} = (1+i)^2 \quad \therefore \quad 1,1664 = (1+i)^2$$

$$\sqrt{1,1664} = \sqrt{(1+i)^2} \quad \therefore \quad i = \sqrt{1,1664} - 1 = 0,08 \quad \therefore \quad i = 8\% \text{ anual}$$

Ejercicio resuelto 3.7

¿Durante cuántos años, meses, días debe invertirse una suma de \$ 6000 para llegar a tener \$ 9000 a una tasa de interés del 6% anual?

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.9).

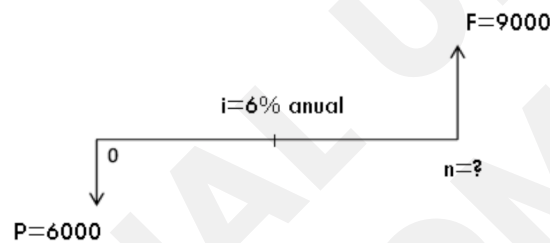


Figura 3.9

Se parte de la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n$$

$$9000 = 6000(1 + 0,06)^n \quad \therefore \quad \frac{9000}{6000} = 1,06^n \quad \therefore \quad 1,5 = 1,06^n \quad \therefore \quad n = \log_{1,06} 1,5$$

$$n = 6,958517 \text{ años} \quad \rightarrow \quad 6 \text{ años}$$

$$? \text{ meses} = 0,958517 \text{ años} * \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}} = 11,5 \text{ meses} \quad \rightarrow \quad 11 \text{ meses}$$

$$? \text{ días} = 0,5 \text{ meses} * \frac{30 \text{ días}}{1 \text{ mes}} = 15 \text{ días}$$

Se requieren 6 años, 11 meses y 15 días para que la suma de \$6000 se convierta en \$9000 si existe de por medio un interés compuesto del 6% anual.

Ejercicio resuelto 3.8

¿A qué tasa de interés debe invertirse un capital para que éste se incremente en un 20% en 1 año?

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.10).

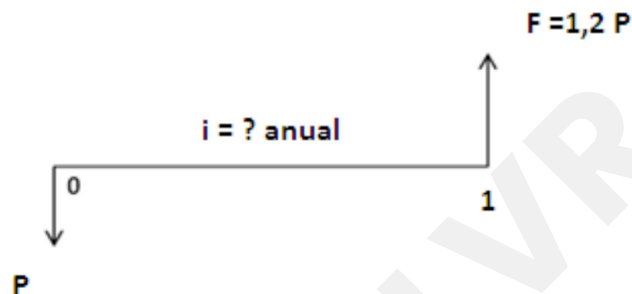


Figura 3.10

En vista de que el enunciado no precisa un valor en dólares para el capital, se asume que ese valor es P .

Como se desea que dicho capital se incremente en un 20%:

$$F = P + 20\% P$$

$$F = P + 0,2 P$$

Usando la fórmula (3.1) y reemplazando los datos:

$$F = P (1+i)^n$$

$$1,2P = P(1+i)^1 \quad \therefore \quad 1,2 = 1+i \quad \therefore \quad i = 0,2 \quad \therefore \quad i = 20\% \text{ anual}$$

3.7 Regla de los 72

Esta regla sirve para encontrar:

- El tiempo necesario *para duplicar* el valor de una inversión inicial, teniendo como dato una tasa de interés compuesta o
- La tasa de interés compuesta a la que debe ser sometido un capital *para que éste duplique su valor*, teniendo como dato el tiempo.

La regla de los 72 da como resultado un valor aproximado, pero con un margen de error aceptable.

Simplemente se divide:

72 para la tasa interés compuesta, obteniéndose el tiempo requerido para que un capital se duplique o

72 para el tiempo dado, obteniéndose la tasa de interés compuesta necesaria para que un capital se duplique.

Ejercicio resuelto 3.9

Encuentre el tiempo requerido para que una inversión de \$ 5000 duplique su valor si se somete a una tasa de interés del 8,5% mensual compuesto

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.11).

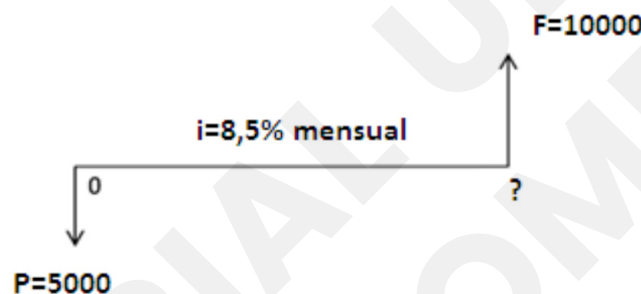


Figura 3.11

1er Método

Usando la Regla de los 72:

$$72 / 8,5 = 8,47 \text{ meses}$$

2do Método

Usando la fórmula (3.1) y reemplazando los datos:

$$F = P (1+i)^n$$

$$10000 = 5000(1 + 0,085)^n \quad \therefore 2 = 1,085^n \quad \therefore n = \log_{1,085} 2 \quad \therefore n = 8,49 \text{ meses}$$

Ejercicio resuelto 3.10

¿A qué tasa de interés anual debe invertirse un capital para que éste se duplique en 36 meses?

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.12)

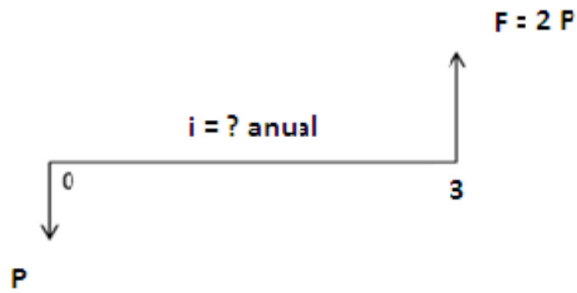


Figura 3.12

1er Método

Usando la regla de los 72:

- En vista de que se requiere la tasa anual, los 36 meses se los transforma a años, resultando $36/12$ años = 3 años

$$72 / 3 = 24\% \text{ anual}$$

- Se puede también encontrar la tasa mensual y ésta transformarla a una tasa anual de la siguiente manera:

$$72 / 36 = 2\% \text{ mensual} \rightarrow 24\% \text{ anual}$$

2do Método

Usando la fórmula (3.1) y reemplazando los datos:

$$F = P(1+i)^n$$

$$2P = P(1+i)^3 \quad \therefore \quad 2 = (1+i)^3 \quad \therefore \quad \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(1+i)^3} \quad \therefore \quad i = \sqrt[3]{2} - 1 = 0,2599$$

$$i = 25,9\% \text{ anual}$$

Ejercicio resuelto 3.11

Una persona invierte en cierta Institución \$ 500, \$ 1000, \$ 1500, \$ 2000, \$ 2500; 4, 5, 6, 7 y 8 meses después de la fecha actual. Si la institución le reconoce una tasa de interés compuesta del 10%. Calcule cuánto podrá retirar luego de 10 meses.

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.13).

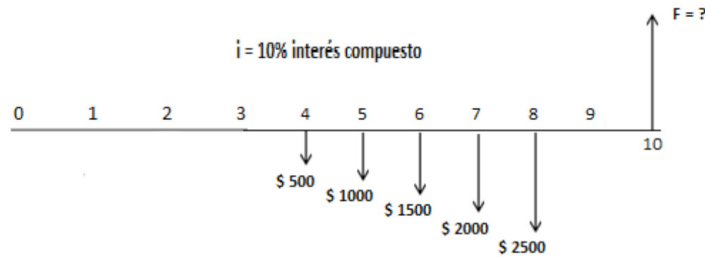


Figura 3.13

1er Método

El DFC muestra un Gradiente Diferido, tema que será tratado en capítulos posteriores y el cual se puede tratar con una fórmula propia. Por lo pronto, apliquemos la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n$$

$$F = F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8$$

$$F = P_4 (1+i)^6 + P_5 (1+i)^5 + P_6 (1+i)^4 + P_7 (1+i)^3 + P_8 (1+i)^2$$

$$F = 500 * 1,1^6 + 1000 * 1,1^5 + 1500 * 1,1^4 + 2000 * 1,1^3 + 2500 * 1,1^2$$

$$F = \$ 10379,4$$

2do Método

Podemos llevar cada uno de los flujos netos a su valor equivalente en la fecha actual y luego ese valor Presente llevarlo a su valor equivalente 10 meses después.

$$\text{Usando la fórmula 3.3: } P = F (1+i)^{-n}$$

$$P = P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8$$

$$P = F_4 (1+i)^{-4} + F_5 (1+i)^{-5} + F_6 (1+i)^{-6} + F_7 (1+i)^{-7} + F_8 (1+i)^{-8}$$

$$P = 500 * 1,1^{-4} + 1000 * 1,1^{-5} + 1500 * 1,1^{-6} + 2000 * 1,1^{-7} + 2500 * 1,1^{-8}$$

$$P = \$ 4001,7236$$

El valor P calculado es el valor equivalente en el momento actual a todas las inversiones mostradas. De este valor P debemos calcular cuál es el valor equivalente 10 meses después, usando nuevamente la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n$$

$$F = 4001,7236 (1 + 0,1)^{10} = \$ 10379,4$$

Ejercicio resuelto 3.12

Se compra un auto sedán nuevo con un pago inicial de \$ 5000 y 3 cuotas iguales de \$2500 que se pagan luego de 1, 2 y 3 meses. La tasa de interés es de 24% anual capitalizable mensualmente. Determinar el precio de contado del auto.

$$i = 24 \% / 12 = 2\% \text{ mensual}$$

Se ilustra el problema con un DFC (Figura 3.14)

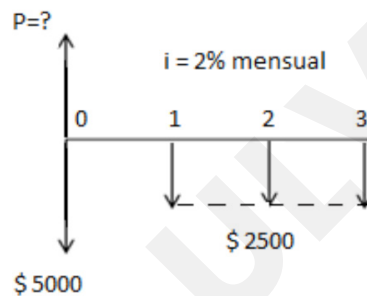


Figura 3.14

$$P = 5000 + P_1 + P_2 + P_3$$

Usando la fórmula 3.3:

$$P = 5000 + \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3}$$

$$P = 5000 + \frac{2500}{(1+0.02)^1} + \frac{2500}{(1+0.02)^2} + \frac{2500}{(1+0.02)^3}$$

$$P = 5000 + 2450,9803 + 2402,9219 + 2355,8058$$

$$P = \$ 12209,7$$

3.8 Períodos de Capitalización. Capitalización periódica y continua

Los períodos de capitalización se pueden definir de las siguientes maneras:

- El interés se puede percibir en períodos de tiempo (2 fechas sucesivas) iguales llamados Períodos de Capitalización.
- Según Alcides José Lasa (n.d.), los períodos de capitalización “se refieren también al

intervalo de tiempo (semanas, meses, años) que debe transcurrir para que los intereses se conviertan en capital”.

- También se puede afirmar que Períodos de Capitalización es el tiempo entre 2 fechas sucesivas en que los intereses se agregan al capital.

Los períodos de capitalización pueden ser tan pequeños como uno decida llegando a tasas de *capitalización instantánea o continua*. En cuyo caso, el monto viene dado por:

$$F = P e^{in} \quad (3.4)$$

F : Monto Máximo

e : constante (base de los logaritmos naturales); $e=2,718281828\dots$

i : Tasa de interés convertible instantáneamente

n : Tiempo en años

En la capitalización continua o instantánea, los intereses se incorporan al capital de manera instantánea. Es decir que el intervalo de tiempo entre capitalizaciones tiende a 0.

En este tipo de capitalizaciones, el número de capitalizaciones al año es muy grande, $n \rightarrow \infty$. Tal como ocurre con la capitalización por segundos, que son 31536 millones de capitalizaciones por en un año (Tabla 3.8). Aunque este tipo de capitalización no se usa actualmente en el país.

Tabla 3.8: Períodos de capitalización vs Número de capitalizaciones al año

Período de capitalización	Número de capitalizaciones al año
Anual	1
Semestral	2
Trimestral	4
Mensual	12
Semanal	52
Diario	365
Por hora	8760
Por minuto	525600
Por segundo	3153600

Ejercicio resuelto 3.13

Marcos le presta a un amigo \$ 70000 por 9 meses, cobrándole un 15% anual convertible bimestral. Al finalizar este plazo, deposita el monto obtenido en una cuenta de ahorros que abona el 14,5% compuesto continuamente. Determine qué monto acumulará Marcos si mantiene el dinero en dicha cuenta por 15 meses.

1ra parte

$i_1 = 15\%$ anual convertible bimestral

$i_1 = 15\% / 6$ bimestral = 2,5% bimestral

$$n_1 = 9 \text{ meses} * \frac{1 \text{ bimestre}}{2 \text{ meses}} = 4,5 \text{ bimestres}$$

$$F_1 = P_1 (1+i_1)^{n_1} = 70000(1+0,025)^{4,5} = 78226,78$$

2da parte

$i_2 = 14,5\%$ compuesto continuamente

$$n_2 = 15 \text{ meses} * \frac{1 \text{ año}}{12 \text{ meses}} = 1,25 \text{ años}$$

$$F_2 = P_2 e^{i_2 n_2}$$

$$F_2 = 78826,78 e^{0,145*1,25} = 93771,6$$

3.9 Tasas de interés nominal y efectiva

Hay varias formas de *redactar* la tasa de interés compuesta, como:

- Tasa de interés nominal
- Tasa de interés efectiva

3.9.1 Tasa de interés nominal

- Es un valor de referencia (pues la palabra nominal significa simbólico, figurado), utilizado en operaciones financieras que suele ser fijada por autoridades para regular los préstamos y depósitos.
- Es la tasa que expresada anualmente puede capitalizarse varias veces al año.
- Es una tasa anual *compuesta* – *capitalizable* – *convertible* periódicamente
- Esta tasa se puede redactar de las siguientes maneras:
 - 10% anual *compuesta* trimestralmente
 - 10% anual *capitalizable* trimestralmente
 - 10% anual *convertible* trimestralmente
 - 10% *nominal* trimestral.

Cualquiera de las 4 formas escrita anteriormente expresan exactamente lo mismo.

Ejemplo 1:

19% anual compuesto mensualmente - 12 veces al año

En este caso se acostumbra dividir la tasa dada para la frecuencia de capitalización

Siendo la *frecuencia de capitalización*, el número de veces al año que el interés se capitaliza para producir nuevos intereses.

$$i = \frac{19\%}{12} \text{ mensual} = 1,58\bar{3} \% \text{ mensual}$$

Esta es la tasa que se utilizaría en la fórmula 3.1

Ejemplo 2:

13% anual compuesto trimestralmente - 4 veces al año

$$i = 13\% / 4 \text{ trimestral} = 3,25\% \text{ trimestral}$$

Esta es la tasa que se utilizaría en la fórmula 3.1

3.9.2 ¿De qué dependen los intereses?

Teniendo presente las fórmulas para el calcular interés ganado o pagado en una unidad monetaria (dólares por ejemplo).

- En el caso de Interés Simple:

$$I = C * n * i \quad (1.9)$$

- En el caso de Interés Compuesto, Capitalización periódica:

$$I = F - P$$

$$I = P (1+i)^n - P$$

$$I = P [(1+i)^n - 1] \quad (3.5)$$

- En el caso de Interés Compuesto, Capitalización continua:

$$I = F - P$$

$$I = P e^{in} - P$$

$$I = P (e^{in} - 1) \quad (3.6)$$

En las fórmulas (1.9), (3.5) y (3.6) se observa que el interés generado por un capital depende de:

- La magnitud del capital propio invertido (a más capital, más intereses).
- El tiempo durante el cual está invertido el capital (a más tiempo, más intereses).
- La tasa de interés aplicada.
- La periodicidad con que se capitalizan.

Se analiza a continuación el último punto.

Ejercicio resuelto 3.14

Se depositan \$ 50000 en una cuenta bancaria que paga el 12% de interés anual compuesto por mes. ¿Cuál será el monto al final de 1 ½ año?

$i = 12\%$ anual compuesto mensualmente

$i = 1\%$ mensual

? meses = 1,5 años * $\frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}} = 18 \text{ meses}$

1er Método

Usando la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n = 50000 * (1+0,01)^{18} = 59807,4$$

2do Método

Usando la fórmula 3.2:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{mp}$$

$i = 12\%$ anual compuesto por mes

$p = 12$

$m = 1,5$ años

$mp = 18$

$P = 50000$

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{mp} = 50000 \left(1 + \frac{0,12}{12} \right)^{18} = 59807.4$$

3er Método

Usando la tabla 3.9:

Tabla 3.9: Resolución del ejercicio resuelto 3.14

Período	Capital	Interés	Monto ó Valor Futuro
0	50000	0	50000
1	50000	500	50500
2	50500	505	51005
3	51005	510.1	51515.1
4	51515.1	515.2	52030.2
5	52030.2	520.3	52550.5
6	52550.5	525.5	53076.0
7	53076.0	530.8	53606.8
8	53606.8	536.1	54142.8
9	54142.8	541.4	54684.3
10	54684.3	546.8	55231.1
11	55231.1	552.3	55783.4
12	55783.4	557.8	56341.3
13	56341.3	563.4	56904.7
14	56904.7	569.0	57473.7
15	57473.7	574.7	58048.4
16	58048.4	580.5	58628.9
17	58628.9	586.3	59215.2
18	59215.2	592.2	59807.4

Ejercicio resuelto 3.15

Con las mismas condiciones del problema anterior, si las tasas se capitalizan por quincena, ¿el monto se incrementa?

Se depositaron \$ 50000 en una cuenta bancaria que paga el 12% de interés anual compuesto quincenalmente. ¿Cuál será el monto al final de 1 ½ año?

$i = 12\%$ anual compuesto quincenalmente

$i = 0,5\%$ quincenal

$$? \text{ quincenas} = 1,5 \text{ años} * \frac{24 \text{ quincenas}}{1 \text{ año}} = 36 \text{ quincenas}$$

1er Método

Usando la tabla 3.10:

Tabla 3.10: Resolución del ejercicio resuelto 3.15

Período	Capital	Interés	Monto
0	50000.0	0.0	50000.0
1	50000.0	250.0	50250.0
2	50250.0	251.3	50501.3
3	50501.3	252.5	50753.8
4	50753.8	253.8	51007.5
5	51007.5	255.0	51262.6
6	51262.6	256.3	51518.9
7	51518.9	257.6	51776.5
8	51776.5	258.9	52035.4
9	52035.4	260.2	52295.5
10	52295.5	261.5	52557.0
11	52557.0	262.8	52819.8
12	52819.8	264.1	53083.9
13	53083.9	265.4	53349.3
14	53349.3	266.7	53616.1
15	53616.1	268.1	53884.1
16	53884.1	269.4	54153.6
17	54153.6	270.8	54424.3
18	54424.3	272.1	54696.4
19	54696.4	273.5	54969.9
20	54969.9	274.8	55244.8
21	55244.8	276.2	55521.0
22	55521.0	277.6	55798.6
23	55798.6	279.0	56077.6
24	56077.6	280.4	56358.0
25	56358.0	281.8	56639.8
26	56639.8	283.2	56923.0
27	56923.0	284.6	57207.6
28	57207.6	286.0	57493.6
29	57493.6	287.5	57781.1
30	57781.1	288.9	58070.0
31	58070.0	290.4	58360.4
32	58360.4	291.8	58652.2
33	58652.2	293.3	58945.4
34	58945.4	294.7	59240.1
35	59240.1	296.2	59536.3
36	59536.3	297.7	59834.0

2do Método

Usando la fórmula 3.1

$$F = P (1+i)^n = 50000 * (1+0,005)^{36} = 59384,0$$

3er Método

Usando la fórmula 3.2:

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{mp}$$

$i = 12\%$ anual compuesto quincenalmente

$p = 24$

$m = 1,5$ años

$mp = 36$

$P = 50000$

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{mp} = 50000 \left(1 + \frac{0,12}{24}\right)^{36} = 59834,0$$

Es evidente entonces que *resulta más rentable*:

- Invertir un capital con una tasa anual compuesta quincenalmente que con una tasa anual compuesta mensualmente.
- Invertir un capital con una tasa anual capitalizable por meses, que con la misma tasa capitalizable por semestres.

Ejercicio resuelto 3.16

¿Qué día usted debe invertir \$ 5000 para llegar a tener \$ 5282 el 6 de junio?. Suponga que la tasa de interés es 26% capitalizable semanalmente.

$$i = 26\% \text{ capitalizable semanalmente} = \frac{26\%}{52} \text{ semanal} = 0,5\% \text{ semanal}$$

$$F = P (1+i)^n$$

$$5282 = 5000 (1 + 0,005)^n$$

$$1,0564 = 1,005^n$$

$$n = \log_{1,005} 1,0564 = 11 \text{ semanas}$$

$$n = 11 \text{ semanas} * \frac{1 \text{ año}}{52 \text{ semanas}} * \frac{360 \text{ días}}{1 \text{ año}} = 76,15 \text{ días} \approx 77 \text{ días}$$

6 de Junio \rightarrow 157

$$157 - x = 77 \quad \therefore \quad x = 80 \quad \rightarrow \quad 21 \text{ de Marzo}$$

3.9.3 Tasa de interés efectiva

Se propone las siguientes definiciones:

- Es el interés real que una persona paga en un crédito-préstamo o cobra en un depósito. Por tanto ayuda a los inversionistas a tomar decisiones.
- Es la tasa que realmente se aplica en el período de capitalización sobre el capital para calcular los intereses.

Ejemplos:

12% trimestral

25% efectiva (anual)

Todas las operaciones financieras se calculan al interés efectivo.

3.9.4 Fórmulas que relacionan las tasas efectiva y nominal

Existen fórmulas para transformar la tasa de interés nominal a efectiva y viceversa. Con estos fines, en Excel se pueden usar las fórmulas `int.efectivo(...)` y `tasa.nominal(...)`. Matemáticamente tenemos las siguientes expresiones:

- **Capitalización periódica**

$$\%e = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 p} \right)^p - 1 \right] * 100 \quad (3.7)$$

En la fórmula 3.4:

$\%e$: Tasa de interés *efectiva anual* (sin dividir para 100)

$\%n$: Tasa anual capitalizable periódicamente (sin dividir para 100)

p : Frecuencia de capitalización

- **Capitalización continua**

$$\%e = (e^{\%n/100} - 1) * 100 \quad (3.8)$$

En la fórmula 3.5:

$\%e$: Tasa de interés efectiva anual (sin dividir para 100)

$\%n$: Tasa anual capitalizable periódicamente (sin dividir para 100)

e : base de los logaritmos neperianos; $e = 2,718281828\dots$

Ejercicio resuelto 3.17

Encuentre la tasa anual capitalizable trimestral que permitiría ganar la misma cantidad de dinero que una tasa efectiva anual del 15%.

Para este ejercicio se utiliza la fórmula 3.7:

$$\%e = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 p} \right)^p - 1 \right] * 100$$

$$15 = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 * 4} \right)^4 - 1 \right] * 100$$

$$\frac{15}{100} = \left(1 + \frac{\%n}{100 * 4} \right)^4 - 1$$

$$0,15 = \left(1 + \frac{\%n}{400} \right)^4 - 1$$

$$1,15 = \left(1 + \frac{\%n}{400} \right)^4$$

$$\sqrt[4]{1,15} = \sqrt[4]{\left(1 + \frac{\%n}{400} \right)^4}$$

$$\sqrt[4]{1,15} = 1 + \frac{\%n}{400}$$

$$\sqrt[4]{1,15} - 1 = \frac{\%n}{400}$$

$$\%n = 400 * (\sqrt[4]{1,15} - 1)$$

$$\%n = 14,22\% \text{ anual capitalizable trimestral}$$

3.9.5 Fórmula que relaciona una tasa de interés efectiva mensual y una tasa de interés efectiva anual

La siguiente fórmula relaciona la tasa de interés efectiva mensual y la tasa de interés efectiva anual:

$$(1 + e_m)^{12} = 1 + e_a \quad (3.9)$$

En la fórmula 3.9:

e_m : Tasa de interés efectiva mensual (dividida para 100)

e_a : Tasa de interés efectiva anual (dividida para 100)

Ejercicio resuelto 3.18

Se requiere conocer cuál es la tasa efectiva mensual respectiva de una tasa del 46,53% efectiva anual.

Se utiliza la fórmula 3.9 de la siguiente manera:

$$(1 + e_m)^{12} = 1 + e_a \quad (3.9)$$

$$(1 + e_m)^{12} = 1 + 0,4653$$

$$(1 + e_m)^{12} = 1,4653$$

$$\sqrt[12]{(1 + e_m)^{12}} = \sqrt[12]{1,4653}$$

$$1 + e_m = \sqrt[12]{1,4653}$$

$$e_m = \sqrt[12]{1,4653} - 1$$

$$e_m = 0,032351 \quad \therefore \quad e_m = 3,23\% \text{ efectiva mensual}$$

3.10 Tasas equivalentes

Son 2 tasas tales que al invertir un mismo capital inicial, en distintos períodos de capitalización producen igual cantidad de ganancia en el mismo tiempo.

Ejercicio resuelto 3.19

Encontrar la tasa anual compuesta por quincenas equivalente al 15,2% anual compuesto por trimestres.

El concepto de tasas equivalente habla de tasas que producen la misma ganancia *en el mismo período de tiempo*. Por tanto, el valor de m lo pondremos igual para ambas tasas. No importa qué valor pongamos. Para realizar los cálculos, en este ejemplo, m será igual a 1 año.

Además para que ganen la misma cantidad de intereses asumiremos que invierten el mismo Capital, P .

? tasa anual compuesto por quincenas \equiv 15,2% anual compuesto por trimestres

$$m_1 = 1 \text{ año}$$

$$m_2 = 1 \text{ año}$$

$$p_1 = 24$$

$$p_2 = 4$$

$$m_1 p_1 = 24$$

$$m_2 p_2 = 4$$

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{mp}$$

Como deseamos ganar la misma cantidad de intereses, partiendo de un mismo capital, los montos acumulados serán los mismos:

$$F_1 = F_2$$

$$P \left(1 + \frac{i_1}{p_1} \right)^{m_1 p_1} = P \left(1 + \frac{i_2}{p_2} \right)^{m_2 p_2}$$

$$P \left(1 + \frac{i_1}{24} \right)^{24} = P \left(1 + \frac{0,152}{4} \right)^4$$

$$\left(1 + \frac{i_1}{24} \right)^{24} = \left(1 + \frac{0,152}{4} \right)^4$$

$$\left(1 + \frac{i_1}{24} \right)^{24} = 1,160885573$$

$$\sqrt[24]{\left(1 + \frac{i_1}{24} \right)^{24}} = \sqrt[24]{1,160885573}$$

$$1 + \frac{i_1}{24} = \sqrt[24]{1,160885573}$$

$$i_1 = 24 * (\sqrt[24]{1,160885573} - 1)$$

$$i_1 = 0,149647$$

$i_1 = 14,96\%$ anual compuesto por quincenas

Ejercicio resuelto 3.20

Encontrar la tasa anual compuesta por trimestres equivalente al 14,96% anual compuesto por quincenas.

El concepto de tasas equivalente habla de tasas que producen la misma ganancia *en el mismo período de tiempo*. Por tanto, el valor de m lo pondremos igual para ambas tasas. No importa qué valor pongamos. Para realizar los cálculos, en este ejemplo, m será igual a 0,5 año (medio año).

Además para que ganen la misma cantidad de intereses asumiremos que invierten el mismo Capital, P .

? tasa anual compuesto por trimestres \equiv 14,96% anual compuesto por quincenas

$$m_1 = 0,5 \text{ año}$$

$$m_2 = 0,5 \text{ año}$$

$$p_1 = 4$$

$$p_2 = 24$$

$$m_1 p_1 = 2$$

$$m_2 p_2 = 12$$

$$F = P \left(1 + \frac{i}{p} \right)^{mp}$$

Como deseamos ganar la misma cantidad de intereses, partiendo de un mismo capital, los montos acumulados serán los mismos:

$$F_1 = F_2$$

$$P \left(1 + \frac{i_1}{p_1} \right)^{m_1 p_1} = P \left(1 + \frac{i_2}{p_2} \right)^{m_2 p_2}$$

$$P \left(1 + \frac{i_1}{4} \right)^2 = P \left(1 + \frac{0,1496}{24} \right)^{12}$$

R/. El DFC desde el punto de vista del acreedor se ilustra en la Figura 3.15.

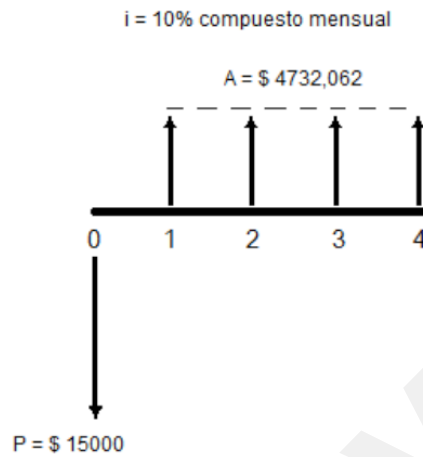
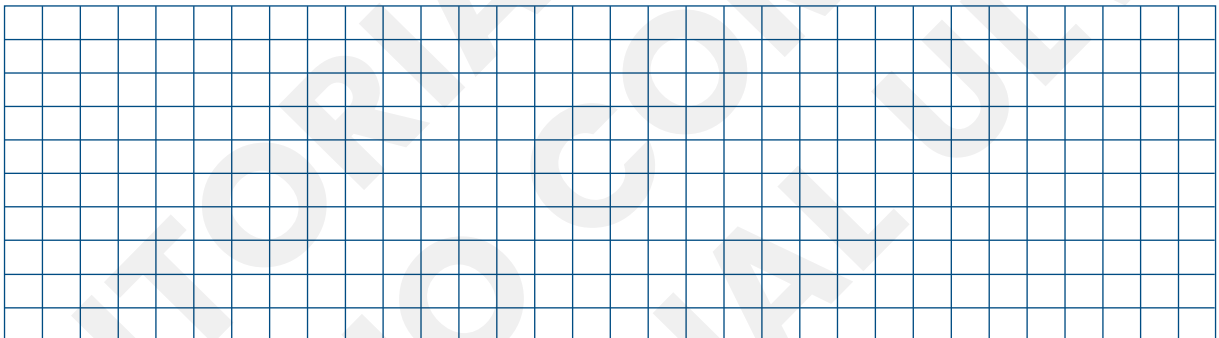


Figura 3.15

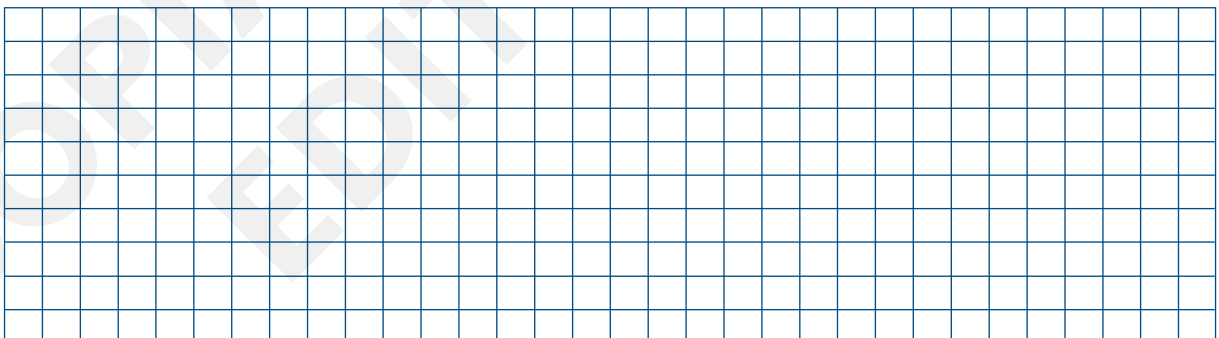
3. Encontrar la tasa anual compuesta por quincenas equivalente al 12% anual convertible por semanas.

R/. 12,01615592% anual convertible por semanas.



4. ¿A qué tasa de interés anual capitalizable semestral fue invertido un capital que aumentó en un 35% si estuvo sometido durante 6 bimestres a dicha tasa de interés?

R/. 32,379% anual capitalizable semestral.



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Qué significa la frase “el interés se capitaliza”?
2. ¿Qué es interés compuesto? ¿En qué consiste?
3. ¿Qué es un DFC? ¿Cuál es su utilidad?
4. ¿Qué fórmula(s) puede utilizar para calcular el Valor Futuro, Monto, Cantidad debida o acumulada?
5. En la fórmula: $F = P (1 + i/p)^{mp}$; ¿qué representa la variable p?
6. ¿Cuál es la diferencia entre tiempo y períodos de capitalización?
7. Demuestre que si el período de capitalización es semanal, el número de capitalizaciones al año es 52.
8. ¿Bajo qué condición(es) es útil la Regla de los 72?
9. ¿De qué aspectos o factores dependen los intereses ganados por un capital?
10. ¿Qué es más rentable y porqué: invertir un capital con una tasa anual convertible bimestral o invertir un capital con una tasa anual capitalizable semestral?
11. ¿Qué entiende por:
 - a. Tasa nominal?
 - b. Tasa efectiva?
 - c. Capitalización periódica?
 - d. Capitalización continua?
12. ¿Qué son tasas equivalentes?

Objetivos:

- Definir claramente el significado de Descuento Compuesto.
- Deducir y presentar las distintas fórmulas para calcular el Descuento Compuesto.
- Ilustrar los conceptos anteriores con ejercicios claros y prácticos.

4.1 Introducción

Descuento compuesto obedece a la misma definición de descuento simple, la diferencia estriba en que en descuento compuesto, las fórmulas se basan en interés compuesto. Recordemos la definición de descuento en términos generales que se presentó en el capítulo 2, sección 2.1.

Al recibir un préstamo, suele suscitarse el siguiente caso.

Alberto pide prestado \$ 10000 a Berta, recibiendo el dinero el 5 mayo del presente. Por el dinero recibido, Alberto firma un documento a Berta (típicamente un pagaré), donde queda constancia que dicha deuda se pagará con los respectivos intereses (supongamos \$ 13500) en una fecha futura, digamos el 10 de noviembre del mismo año.

Berta entregó el dinero el 5 de mayo y se queda con el pagaré firmado esperando que llegue el 10 de noviembre para cobrar préstamos más intereses. Pero en el transcurso de este tiempo, Berta necesita efectivo porque un familiar cercano sufrió un accidente de tránsito, siendo lo más relevante que tiene como dinero en ese momento, el pagaré firmado por Alberto.

En su afán por conseguir efectivo, Berta, *vende* el pagaré a Luis en \$ 12000 el 11 de octubre del mismo año, para así poder encarar los gastos de su familiar.

El día que vence el pagaré, Alberto deberá pagar ahora los \$ 13500 a Luis, quien ganará \$ 1500 con esta transacción.

A los \$1500 ($\$ 13500 - \$ 12000$) que ganó Luis en la transacción toma en el ámbito comercial el nombre de DESCUENTO. Dicho *Descuento*, puede ser expresado en términos de unidades monetarias ó como una tasa.

4.2 Nomenclatura, gráfico y fórmulas

Se ilustra la transacción descrita anteriormente en la Figura 4.1 sobre una línea de tiempo. Este gráfico es muy útil y representa la situación tanto en Descuento con Interés Simple como en Descuento con Interés Compuesto.

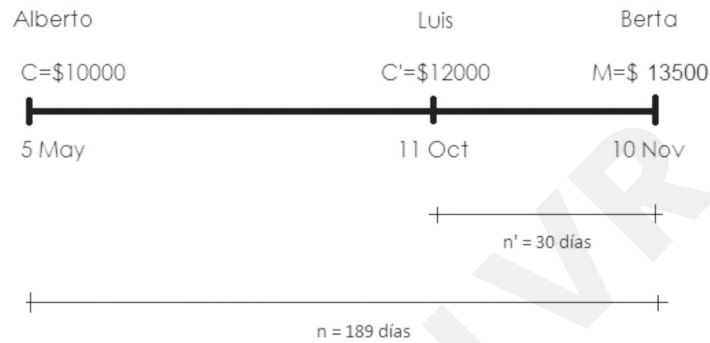


Figura 4.1

A continuación se definen las fórmulas para Descuento Compuesto y luego el significado de la nomenclatura.

$$M = C' (1 + d)^{n'} \quad (4.1)$$

M : Valor nominal del documento.

(Valor del préstamo-crédito con intereses incluidos).

C' : Valor comercial del documento.

(Valor en el que se negocia el documento. Cantidad que se paga por un documento no vencido. Incluye un descuento).

d : Tasa de descuento compuesta periódica.

n' : Tiempo desde que se negocia el documento hasta que vence el mismo.

$$M = C (1 + i)^n \quad (4.2)$$

M : Valor nominal del documento.

(Valor del préstamo-crédito con intereses incluidos).

C : Valor de préstamo o crédito.

i : Tasa de interés nominal compuesta.

n : Tiempo desde que se recibe el préstamo hasta cuando haya que pagarlo.

Ejercicio resuelto 4.1

¿En qué valor se negocia un documento el 6 de junio cuyo valor nominal es de \$ 25000?

El documento tiene fecha de vencimiento 6 de octubre. Considere que la tasa de descuento es del 11% nominal mensual.

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 4.2.

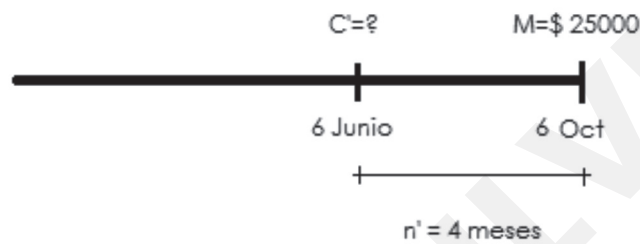


Figura 4.2

$$d = 11\% \text{ nominal mensual} = 11\% / 12 \text{ mensual} = 0,92\% \text{ mensual}$$

Téngase presente la fórmula 4.1:

$$M = C'(1 + d)^{n'}$$

Despejando C' :

$$C' = M(1 + d)^{-n'}$$

$$C' = 25000(1 + 0,0092)^{-4}$$

$$C' = \$24100,77$$

Ejercicio resuelto 4.2

Se negocia un pagaré en \$65000 el 28 de junio con descuento compuesto del 10,2% nominal mensual. Asuma que la fecha de vencimiento es el 10 noviembre, luego calcule:

- De qué cantidad fue el préstamo, otorgado el 10 marzo, que dio lugar al pagaré, si se consideran intereses del 12% simple anual.
- La utilidad que obtuvo quien compró el documento antes de su vencimiento
- Los intereses que se pagaron por dicho préstamo

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 4.3.

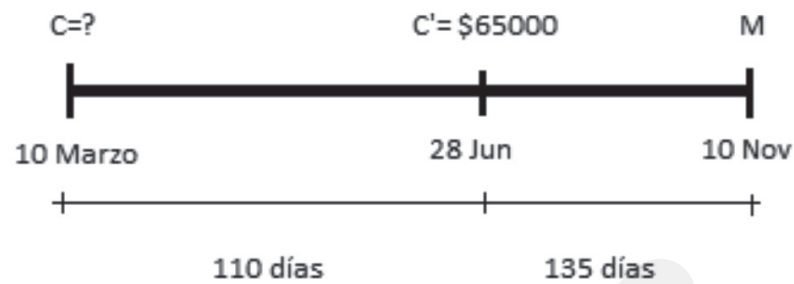


Figura 4.3

$$d = 10,2\% \text{ nominal mensual} = 10,2\% / 12 \text{ mensual} = 0,85\% \text{ mensual}$$

a. El valor del préstamo

Recordemos la fórmula 4.1:

$$M = C'(1 + d)^{n'}$$

$$M = 65000 (1 + 0,0085)^{135/30}$$

$$M = \$ 67523,5$$

Recordemos ahora la fórmula 1.7:

$$M = C (1 + ni)$$

Despejando C:

$$C = M (1 + ni)^{-1}$$

$$C = 67523,5 (1 + 0,12 * 245/360)^{-1}$$

$$C = \$ 62425,42$$

b. Utilidad que obtuvo quien compró el documento antes de su vencimiento

$$U = M - C' = 67523,5 - 65000 = \$ 2523,5$$

c. Intereses que se pagaron por el préstamo

$$I = M - C = 67523,5 - 62425,42 = \$ 5098,08$$

Ejercicio resuelto 4.3

Calcule la tasa de descuento anual compuesta diario de un documento cuyo valor nominal es de \$ 40000 y que vence el 3 de abril y que se negocia en \$ 39000 el 15 de marzo

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 4.4.

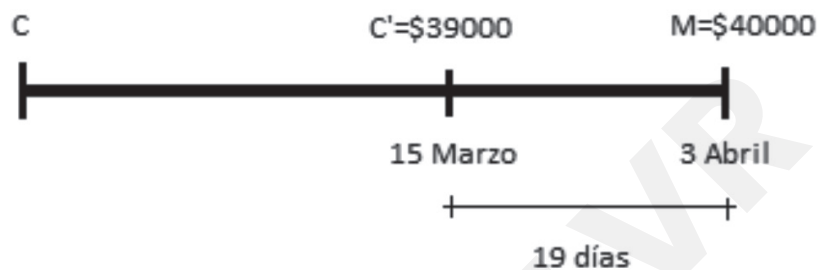


Figura 4.4

Recordemos la fórmula 4.1:

$$M = C'(1 + d)^{n'}$$

Despejando C' :

$$C' = M(1 + d)^{-n'}$$

$$39000 = 40000 \left(1 + \frac{d}{360}\right)^{-19}$$

$$0,975 = \left(1 + \frac{d}{360}\right)^{-19}$$

$$0,975^{-1/19} = \left[\left(1 + \frac{d}{360}\right)^{-19}\right]^{-1/19}$$

$$0,975^{-1/19} = 1 + \frac{d}{360}$$

$$d = 360 * \left(0,975^{-\frac{1}{19}} - 1\right) = 0,48$$

$d = 48\%$ anual compuesta diariamente

Ejercicio resuelto 4.4

Encuentre el valor nominal (valor del préstamo + intereses) de un pagaré que se firmó por un préstamo de \$25000 considerando un interés del 12% nominal trimestral. El dinero se recibió en préstamo el 10 de enero y se prometió cancelar el valor nominal mencionado el 6 de junio.

El enunciado se ilustra en la Figura 4.5.

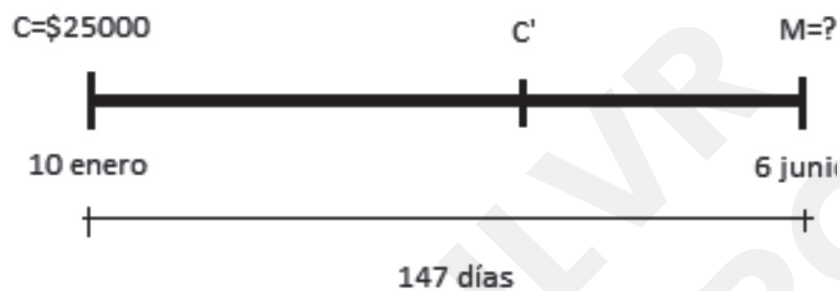


Figura 4.5

$i = 12\% \text{ nominal trimestral} = 12\% / 4 \text{ trimestral} = 3\% \text{ trimestral}$

$$n = 147 \text{ días} * \frac{1 \text{ mes}}{30 \text{ días}} * \frac{1 \text{ trimestre}}{3 \text{ meses}} = 1.6\bar{3} \text{ trimestres}$$

Recordemos la fórmula 4.2

$$M = C(1+i)^n$$

$$M = 25000(1 + 0,03)^{1.6\bar{3}}$$

$$M = \$ 26236,6$$

Ejercicio resuelto 4.5

¿Cuánto gana en dólares una persona que compra un documento 5 meses antes de su vencimiento si el documento tiene un valor nominal de \$ 45000 y se considera una tasa de descuento del 6% nominal mensual ?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 4.6.

$$d = 6\% \text{ nominal mensual} = 6\% / 12 \text{ meses} = 0,5\% \text{ mensual}$$

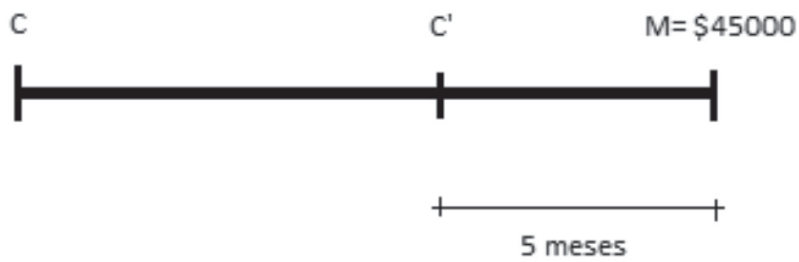


Figura 4.6

Recordemos la fórmula 4.1:

$$M = C'(1 + d)^{n'}$$

Despejando C' :

$$C' = M(1 + d)^{-n'}$$

$$C' = 45000 (1 + 0,005)^{-5} = \$ 43891,7$$

$$U = M - C' = 45000 - 43891,7 = \$ 1108,3$$

Ejercicio resuelto 4.6

Un documento tiene valor nominal de \$ 18000 y se lo negocia en \$ 15500 con una tasa de descuento del 20% nominal diario.

¿Cuántos días antes del vencimiento del documento se realizó la negociación del mismo?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 4.7.

$$d = 20\% \text{ nominal diario} = \frac{20\%}{360} \text{ diario} = 0,05\bar{5}\% \text{ diario}$$

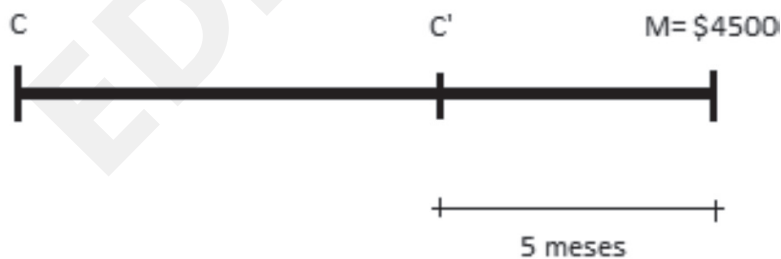
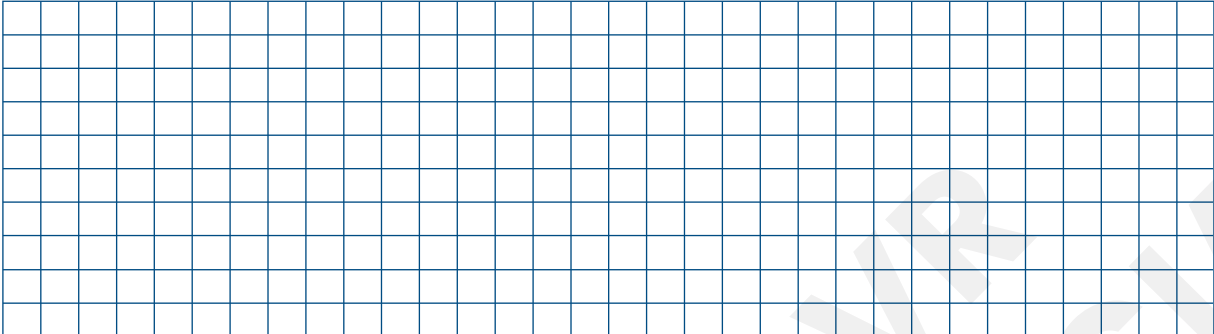


Figura 4.7

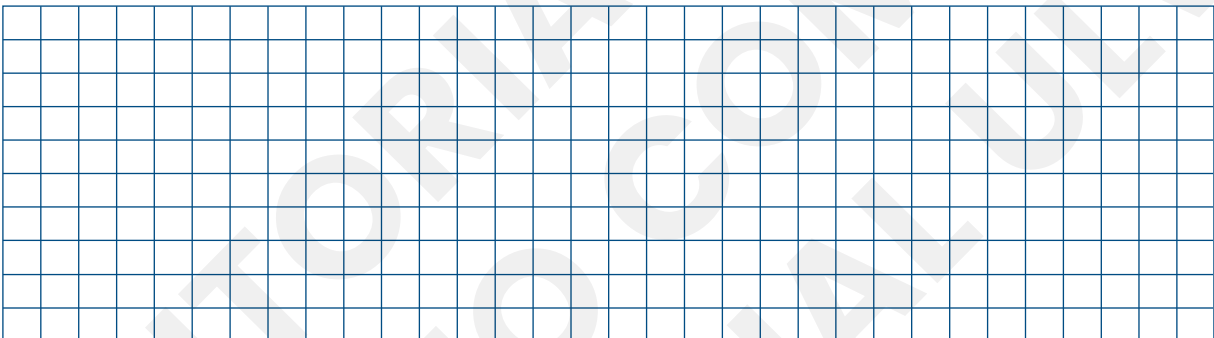
3. Un documento tiene valor nominal de \$ 210000 y se negocia en \$ 205500 con un descuento nominal semanal del 14,25%. Determine cuántos meses antes se realizó su negociación.

R/. 1,98 meses = 2 meses



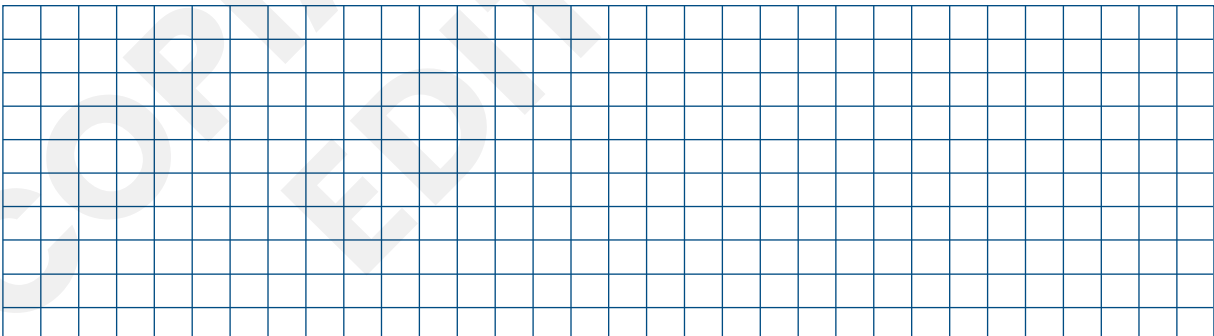
4. Encuentre el valor nominal de un documento que garantiza el pago de un préstamo de \$ 135900 en el cual se incluye un interés del 25% nominal mensual. El préstamo se recibe el 2 de enero y debe ser cancelado el 9 de noviembre. Considerar que se trata de un año bisiesto.

R/. \$ 168403



5. Julio le presta \$ 51900 a Martha firmando un pagaré por \$ 56700. Julio 5 meses antes de la fecha de vencimiento del pagaré, vende el mismo a Gustavo. ¿Cuánto gana Gustavo al comprar el pagaré si se incluye un descuento del 20% compuesto por semanas?

R/. \$ 4190,3



Anualidades Ordinarias o Vencidas

Objetivos:

- Definir el significado de Anualidad.
- Presentar una clasificación de los distintos tipos de Anualidades.
- Ilustrar con ejemplos claros y prácticos, el primer tipo de anualidades: las Anualidades Ordinarias o Vencidas.

5.1 Definición de Anualidad

Una anualidad es un conjunto de pagos (cuotas, abonos, depósitos, etc.) o rentas que se caracterizan por:

- Ser constantes (todos de la misma magnitud o valor).
- Ser realizados a intervalos de tiempo iguales (períodos de igual cantidad de tiempo). Es decir, si entre el 1er pago y el 2do pago han transcurrido 15 días, entre el 2do y el 3er pago también deben de transcurrir 15 días y así sucesivamente.
- Ser secuenciales. Uno a continuación de otro. Esta última característica se deriva de la anterior.

Se las conoce también como *Serie Anual Uniforme* o simplemente *Rentas*.

Cabe destacar que Anualidades no significa necesariamente que los pagos o las rentas sean anuales, sino pagos o rentas a intervalos de tiempo iguales podrían ser: diarios, semanales, quincenales, mensuales, bimestrales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

Ejemplos de anualidades:

- Pagos mensuales por la compra de una casa.

Los pagos mensuales por la compra de una casa o de un auto cumplen las características anteriormente citadas.

- Fondos de amortización.

Un fondo de amortización se puede considerar como una *cuenta* donde se depositan cuotas de la misma cantidad a un cierto interés. Luego de un tiempo, se retira del fondo el dinero acumulado con el fin de que la empresa enfrente un gasto (renewe equipos de tecnología, ...) o una deuda (levante una hipoteca, ...)

- Entre otros

Gráficamente las anualidades se representan con flechas del mismo tamaño en un DFC, como sigue en las siguientes ilustraciones.

Ejercicio resuelto 5.1

Interprete la Figura 5.1

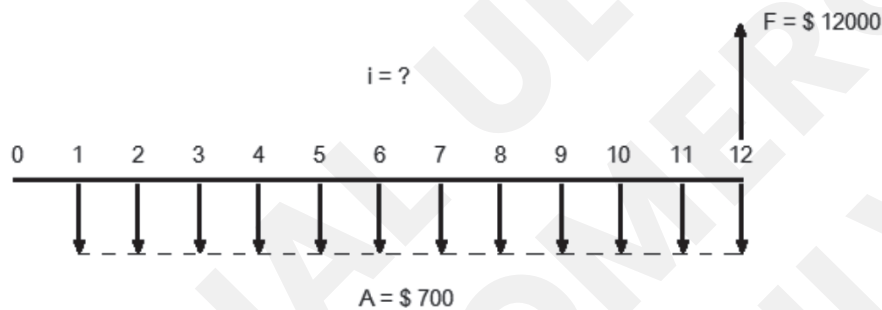


Figura 5.1

La Figura 5.1 se puede interpretar de la siguiente manera. Si se realizan 12 depósitos al final de cada período de \$ 700, a qué tasa de interés se deben someter dichos pagos para llegar a tener \$ 12000 junto con el último depósito.

Nótese que los períodos pueden ser quincenales, mensuales, trimestrales, etc.

Ejercicio resuelto 5.2

Interprete la Figura 5.2

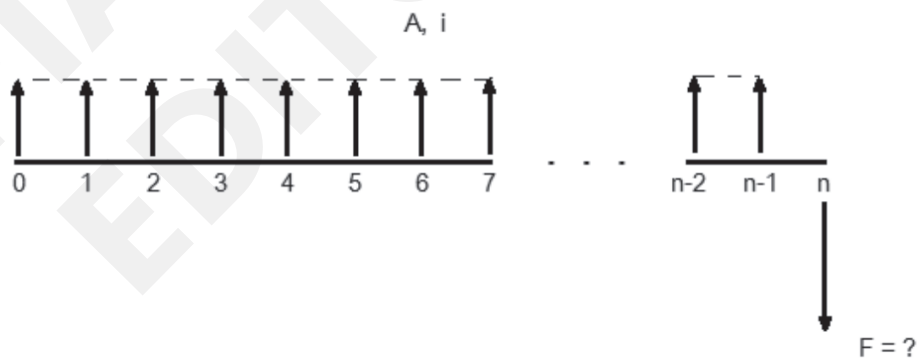


Figura 5.2

La Figura 5.2 se puede interpretar como sigue. Una institución financiera recibe depósitos de un valor A por parte de un cliente al inicio de cada período. A dichos depósitos se les reconocerá una tasa de interés i . ¿Cuánto debe devolver la institución financiera al cliente luego de n períodos?

5.2 Tipos de Anualidades

Las anualidades pueden ser de distinto tipo y se las puede clasificar en base a distintos criterios.

- En este libro se analizarán los siguientes tipos:
- Anualidades Ordinarias, Vencidas o Rentas Post-pagables
- Anualidades Anticipadas
- Anualidades Diferidas
- Perpetuidades
- **Anualidades Ordinarias, Vencidas o Rentas Post-pagables**

Son aquellas en las que las rentas o los pagos se hacen al final de cada período.

Nótese que las rentas o los pagos pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

Por ejemplo: asuma que usted recibe un préstamo de un valor P , que lo pagará con n abonos de un valor A al final de cada período considerando una tasa de interés i . Graficándolo en un DFC, apreciamos estas transacciones en la Figura 5.3.

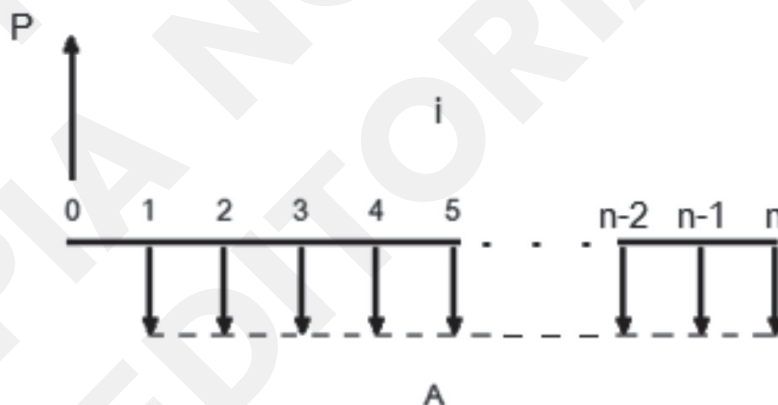


Figura 5.3

- **Anualidades Anticipadas**

Son aquellas en las que las rentas o los pagos se hacen al inicio de cada de período.

Los rentas o los pagos pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

A manera de ejemplo, asuma que usted recibe un préstamo de un valor P , que lo pagará con n abonos de un valor A al inicio de cada período a una tasa de interés i . Se ilustran estas transacciones en la Figura 5.4 en un DFC.

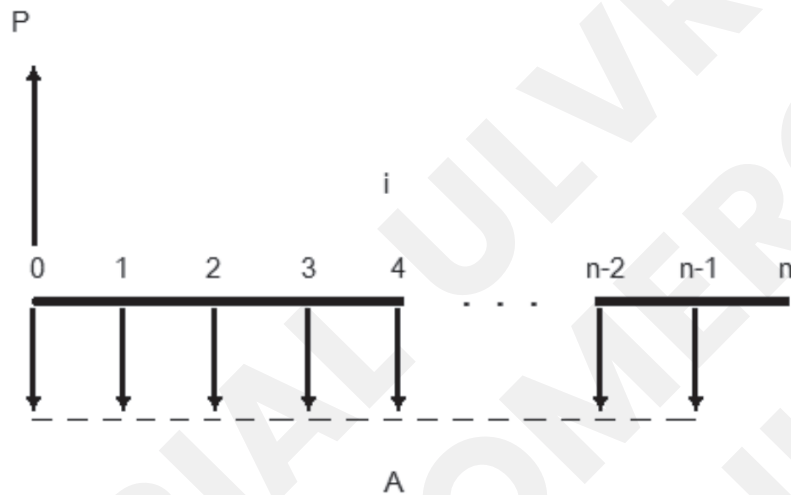


Figura 5.4

- **Anualidades Diferidas**

Son aquellas en las que la primera renta o el primer pago se realiza después de transcurrido un cierto número de períodos.

Se da cuando:

- los pagos se aplazan por un tiempo o existe un período de gracia antes de realizar los pagos o,
- se hace una inversión y ésta comienza a producir luego de un haber transcurrido cierto tiempo.

Las rentas o los pagos pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

Consideremos que una persona invierte \$ 6800 hoy a una cierta tasa de interés nominal semestral y 4 semestres después comienza a recibir rentas de \$ 950 por 9 veces consecutivas. Este enunciado se lo puede observar en la Figura 5.5.

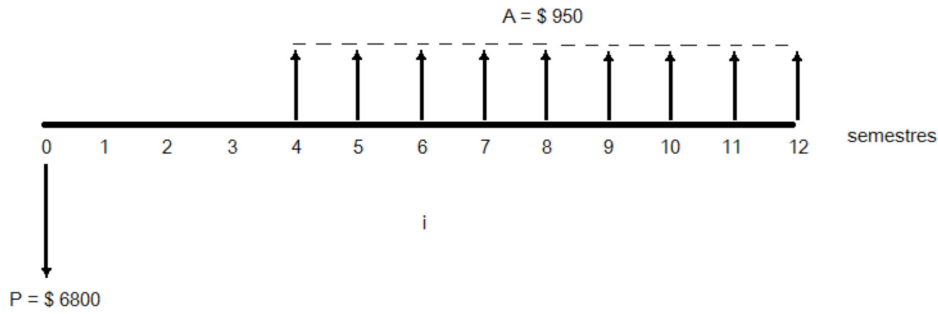


Figura 5.5

- **Rentas perpetuas o perpetuidades**

Son aquellas anualidades en las cuales las rentas o los pagos se realizan de manera indefinida (de por vida).

Este tipo de anualidades ocurre generalmente, por ejemplo, cuando un multimillonario fallece y deja estipulado en su testamento que una Fundación o Institución sin fines de lucro (asilo de ancianos, orfanatos, etc.) recibirá una pensión indefinida como estímulo por su labor (Figuras 5.6 y 5.7).

Las rentas o los pagos perpetuos generalmente son: mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc. Aunque el esquema es el mismo si existieran casos en que fueran diarios o semanales.

Las Rentas Perpetuas más comunes son las Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas y las Rentas Perpetuas Anticipadas aunque *existen otros tipos de Perpetuidades que se estudiarán en detalle en el capítulo 8*.

En las **Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas**, las rentas o los pagos se realizan de por vida y al final de cada período. Véase Figura 5.6.

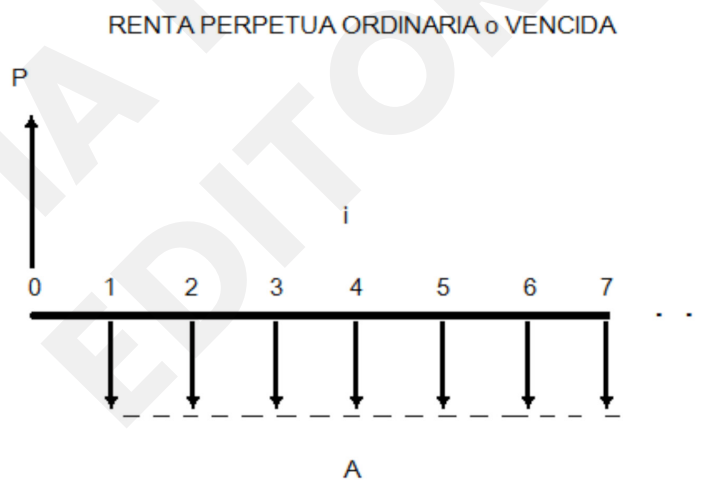


Figura 5.6

En las **Rentas Perpetuas Anticipadas**, las rentas o los pagos se realizan de por vida y al inicio de cada período. Véase Figura 5.7.

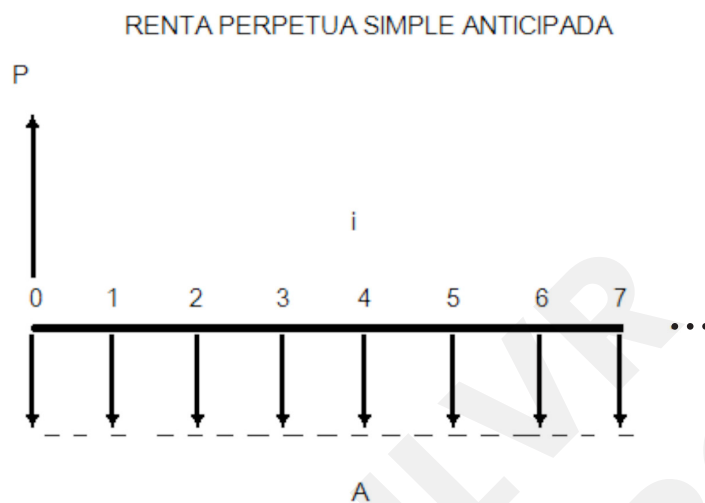


Figura 5.7

5.3 Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Ordinaria

Consideremos a la Anualidad Ordinaria o Vencida que se observa en la Figura 5.8.

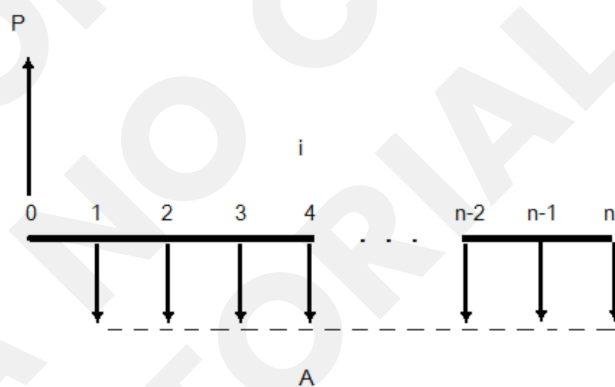


Figura 5.8

La Figura 5.8 se puede interpretar de la siguiente manera. Usted recibe un préstamo de una cantidad P que lo va a pagar con n abonos de un valor A . Por dicho préstamo le cobran una tasa de interés i .

La interpretación es la misma si en lugar de ser pagos a realizar son rentas a recibir. Simplemente el sentido de las flechas cambiaría. Es decir, la flecha que está hacia arriba estaría hacia abajo y las flechas hacia abajo estarían hacia arriba. Dicha situación se daría por ejemplo

cuando usted invierte una cantidad y dicha inversión se somete a una tasa de interés i , recibiendo luego n rentas de igual valor.

Consideremos que son datos del problema las siguientes variables: i , n , A y tenemos como incógnita el Valor Presente P .

Primer Método

Llevando a valor presente cada una de los pagos mostrados en la Figura 5.8, tendríamos:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{n-1} + P_n$$

Recordemos de la Fórmula 3.3:

$$P_j = \frac{F_j}{(1+i)^j}$$

Reemplazando la fórmula 3.3 en cada sumando, tendríamos:

$$P = \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{F_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Pero cada valor futuro, es en realidad un pago de valor A que se realiza, por tanto:

$$P = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n}$$

Sacando A como factor común al lado derecho del igual:

$$P = A \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (1)$$

La expresión en corchetes representa la Suma de los n primeros términos de un Progresión Geométrica Finita. Encontremos el valor de dicha suma:

$$S_n = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

En la Progresión Geométrica de la línea anterior:

$$a_1 = \frac{1}{(1+i)^1}, \quad R = \frac{1}{(1+i)^1}$$

Recordemos que la fórmula para encontrar S_n viene dada por la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{a_1 (R^n - 1)}{R - 1}$$

Reemplazando a_1 y R :

$$S_n = \frac{\frac{1}{(1+i)^1} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{1}{(1+i)^1} - 1} = \frac{\frac{1}{(1+i)^1} \left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{\frac{1 - (1+i)}{(1+i)^1}} = \frac{\frac{1}{(1+i)^1} \left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]}{\frac{-i}{(1+i)^1}}$$

$$S_n = \frac{(1+i)^1}{(1+i)^1} \left[\frac{1 - (1+i)^n}{-i (1+i)^n} \right] = \frac{1 - (1+i)^n}{-i (1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i (1+i)^n}$$

Reemplazando el valor de S_n que acabamos de calcular en la ecuación (1):

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i (1+i)^n} \right]$$

Manipulando algebraicamente esta expresión, podemos escribir:

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] \quad (5.1)$$

A la expresión entre corchetes se conoce como *FACTOR VALOR PRESENTE SERIE UNIFORME*

Despejando A de la Fórmula 5.1, obtenemos la Fórmula 5.2:

$$A = P \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right] \quad (5.2)$$

A la expresión entre corchetes se conoce como *FACTOR RECUPERACION DE CAPITAL*

Segundo Método

Llevando a valor presente cada una de los pagos mostrados en la Figura 5.8, tendríamos:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{n-1} + P_n$$

Recordemos de la Fórmula 3.3:

$$P_j = \frac{F_j}{(1+i)^n}$$

Reemplazando la Fórmula 3.3 en cada sumando, tendríamos:

$$P = \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{F_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

Pero cada valor futuro, es en realidad un pago de valor A que se realiza, por tanto:

$$P = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \dots + \frac{A}{(1+i)^{n-1}} + \frac{A}{(1+i)^n} \quad (1)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por $1 / (1+i)$:

$$\frac{P}{1+i} = \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \frac{A}{(1+i)^4} + \dots + \frac{A}{(1+i)^n} + \frac{A}{(1+i)^{n+1}} \quad (2)$$

Restando (2) - (1):

$$\frac{P}{1+i} - P = \frac{A}{(1+i)^{n+1}} - \frac{A}{(1+i)^1}$$

Sacando factor común P y $A / (1+i)$ a la izquierda y a la derecha del igual:

$$P \left(\frac{1}{1+i} - 1 \right) = \frac{A}{1+i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$P \left[\frac{1 - (1+i)}{1+i} \right] = \frac{A}{1+i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$P \left[\frac{-i}{1+i} \right] = \frac{A}{1+i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i) / (-i)$:

$$P = \frac{A}{-i} \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

$$P = \frac{A}{-i} \left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i (1+i)^n} \right]$$

Manipulando algebraicamente esta expresión, podemos escribir:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

5.4 Dedución de la fórmula de Valor Futuro para una Anualidad Ordinaria

Consideremos a la Anualidad Ordinaria o Vencida dada en la Figura 5.9.

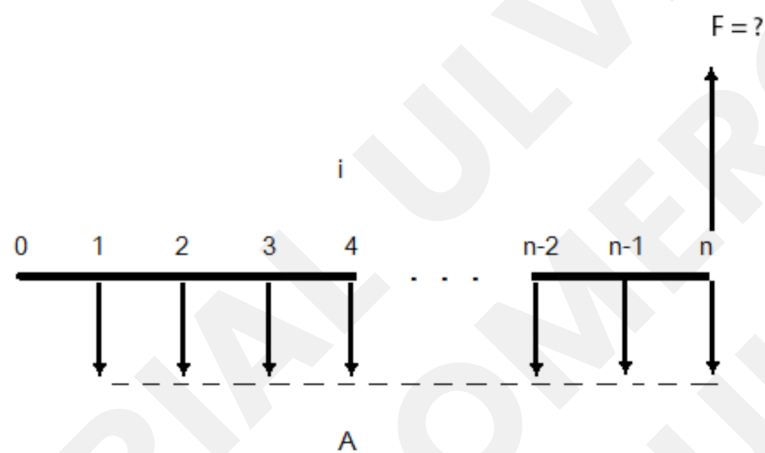


Figura 5.9

Recordemos la fórmula 5.1 que deducimos anteriormente:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

Esta fórmula la podemos manipular algebraicamente de la siguiente manera:

$$P = A \left[\frac{1 - \frac{1}{(1 + i)^n}}{i} \right]$$

$$P = A \left[\frac{\frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n}}{i} \right]$$

$$P = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i (1 + i)^n} \right]; \quad i \neq 0$$

Conocemos de la fórmula 3.3 que $P = F / (1+i)^n$, lo cual reemplazamos en la ecuación anterior:

$$\frac{F}{(1+i)^n} = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$$

Multiplicando ambos miembros por $(1+i)^n$:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]; i \neq 0 \quad 5.3$$

A la expresión entre corchetes se conoce como *FACTOR CANTIDAD COMPUESTA SERIE UNIFORME*

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]; i \neq 0 \quad 5.4$$

A la expresión entre corchetes se conoce como *FACTOR FONDO DE AMORTIZACION*

5.5 Fórmulas y factores de interés compuesto

Tabla 5.1. Fórmula y factores de interés compuesto

Nombre del factor	Fórmula	Nomenclatura alternativa
Valor Presente	3.3 $P = F \left[\frac{1}{(1+i)^n} \right] = F (1+i)^{-n}$	$P = F(P/F, i\%, n)$
Cantidad compuesta pago único	3.1 $F = P [1+i]^n$	$F = P(F/P, i\%, n)$
Factor Valor Presente Serie Uniforme	5.1 $P = A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]; i \neq 0$	$P = A(P/A, i\%, n)$
Factor Recuperación de Capital	5.2 $A = P \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right]; i \neq 0$	$A = P(A/P, i\%, n)$
Factor cantidad compuesta Serie Uniforme	5.3 $F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]; i \neq 0$	$F = A(F/A, i\%, n)$
Factor Fondo de Amortización	5.4 $A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]; i \neq 0$	$A = F(A/F, i\%, n)$

NOTAS:

- Todos los factores se dedujeron a partir del año 0.
- Para calcular el valor de los factores sin usar las fórmulas ni la calculadora, usando la nomenclatura alternativa, ver las tablas dadas en el Apéndice respectivo.

Ejercicio resuelto 5.3

¿De qué valor debe ser una inversión para recibir una renta de \$ 150 cada año por 4 años consecutivos si se considera un interés del 10%?

Se ilustra el enunciado con un DFC (Figura 5.10).

Resolveremos el ejercicio por 3 métodos:

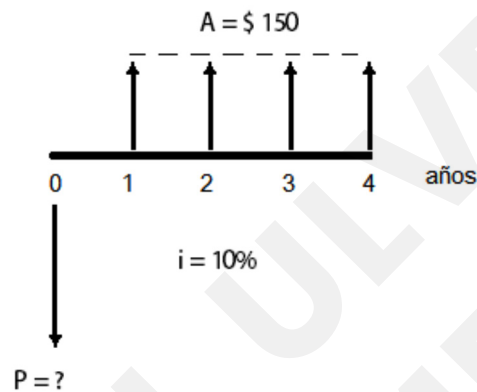


Figura 5.10

Primer Método:

Llevando a valor presente cada una de las rentas futuras:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$P = F_1 (1+i)^{-1} + F_2 (1+i)^{-2} + F_3 (1+i)^{-3} + F_4 (1+i)^{-4}$$

$$P = 150 (1+0,1)^{-1} + 150 (1+0,1)^{-2} + 150 (1+0,1)^{-3} + 150 (1+0,1)^{-4}$$

$$P = \$ 475,48$$

Segundo Método:

Usando la fórmula 5.1 de Valor Presente dado como dato una Anualidad:

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$P = 150 \left[\frac{1 - (1+0,1)^{-4}}{0,1} \right]$$

$$P = \$ 475,48$$

Tercer Método:

Usando las tablas de Factores de Interés Compuesto (Apéndice F):

$$P = A (P/A, 10\%, 4)$$

$$P = 150 * 3,1699$$

$$P = \$ 475,48$$

Ejercicio resuelto 5.4

¿Cuánto dinero debe invertirse ahora para recibir una renta anual de \$ 500 durante 8 años a partir del próximo año si la tasa de interés es del 10% anual?

Se ilustra el enunciado en un DFC (Figura 5.11).

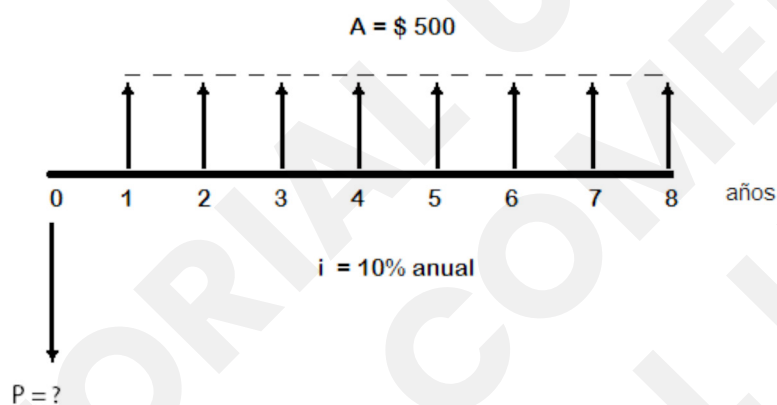


Figura 5.11

Primer Método

Llevando a valor presente cada una de las rentas futuras:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_8$$

$$P = F_1 (1+i)^{-1} + F_2 (1+i)^{-2} + F_3 (1+i)^{-3} + \dots + F_8 (1+i)^{-8}$$

$$P = 500 (1+0,1)^{-1} + 500 (1+0,1)^{-2} + 500 (1+0,1)^{-3} + \dots + 500 (1+0,1)^{-8}$$

$$P = \$ 2667,46$$

Segundo Método

Usando la fórmula 5.1 de Valor Presente dado como dato una Anualidad:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$P = 500 \left[\frac{1 - (1 + 0,1)^{-8}}{0,1} \right]$$

$$P = \$ 2667,46$$

Tercer Método

Usando las Tablas de Factores de Interés Compuesto (Apéndice F):

$$P = A (P/A, 10\%, 8)$$

$$P = 500 * 5,3349$$

$$P = \$ 2667,45$$

Ejemplo resuelto 5.5

Juan Flores solicita un préstamo de \$ 6000 y debe pagarlo en 7 cuotas anuales iguales, comenzando dentro de 1 año. ¿De cuánto serían los pagos si la tasa de interés es del 15% anual?

Se ilustra el enunciado en un DFC (Figura 5.12).

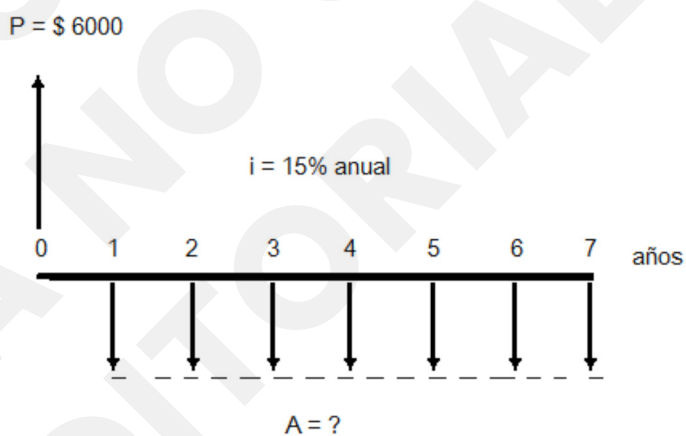


Figura 5.12

Primer Método

Usando la fórmula 5.2 de Valor Presente dado como dato una Anualidad

$$A = P \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$A = 6000 \left[\frac{0,15}{1 - (1 + 0,15)^{-7}} \right]$$

$$A = \$ 1442,16$$

Segundo Método

Usando las tablas de Factores de Interés Compuesto (Apéndice F):

$$A = P (A/P, 15\%, 7)$$

$$A = 6000 * 0,24036$$

$$A = \$ 1442,16$$

Ejemplo resuelto 5.6

¿De qué valor debe ser el pago uniforme al final de cada año que se requeriría para cancelar completamente un crédito – préstamo – deuda de \$ 40000 en 6 años si el primer pago se efectúa dentro de un año y la tasa de interés anual es de 12%?

Se ilustra el enunciado en un DFC (Figura 5.13).

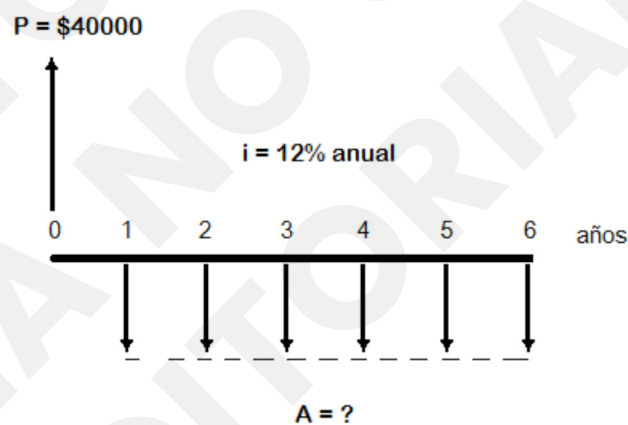


Figura 5.13

Primer Método

Usando la fórmula 5.2 de Valor Presente dado como dato una Anualidad tendríamos:

$$A = P \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$A = 40000 \left[\frac{0,12}{1 - (1 + 0,12)^{-6}} \right]$$

$$A = \$ 9729,03$$

Segundo Método

Usando las tablas de Factores de Interés Compuesto (Apéndice F):

$$A = P (A/P, 12\%, 6)$$

$$A = 40000 * 0,24323$$

$$A = \$ 9729,2$$

Ejemplo resuelto 5.7

Fernando Gallegos desea saber cuánto podrá retirar de una cuenta semanalmente durante 6 meses, si para esto invierte \$ 25000 devengando intereses del 26% anual compuesto por semanas

$$i = 26\% \text{ anual compuesto semanal} = \frac{26\%}{52} = 0,5\% \text{ semanal}$$

$$? \text{ semanas} = 6 \text{ meses} * \frac{1 \text{ año}}{12 \text{ meses}} * \frac{52 \text{ semanas}}{1 \text{ año}} = 26 \text{ semanas}$$

Se ilustra el enunciado con un DFC (Figura 5.14)

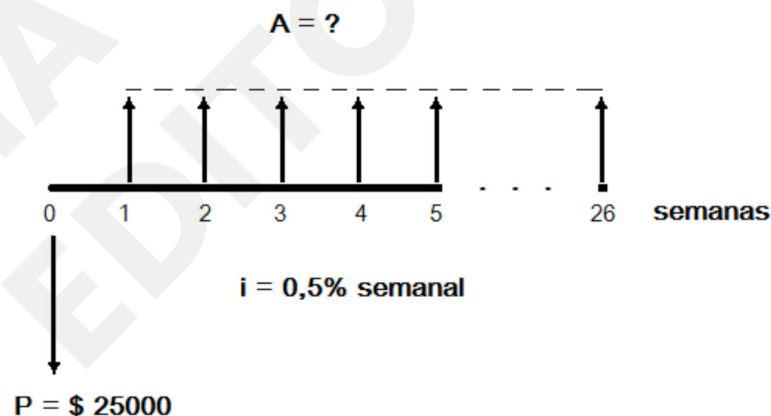


Figura 5.14

$$A = P \left[\frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} \right]$$

$$A = 25000 \left[\frac{0,005}{1 - (1 + 0,005)^{-26}} \right]$$

$$A = \$ 1027,8$$

Ejercicio resuelto 5.8

Juan López efectúa depósitos anuales de \$ 1500 en una cuenta de ahorros durante 10 años empezando dentro de un año. ¿Cuánto habrá en la cuenta inmediatamente después que se efectúa el último depósito si se considera un interés del 8% anual?

Se ilustra el enunciado en la Figura 5.15

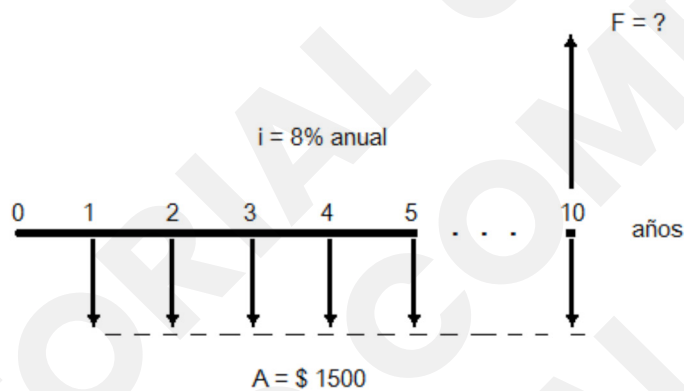


Figura 5.15

Primer Método

Utilizando la fórmula 5.3:

$$F = A \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

$$F = 1500 \left[\frac{(1 + 0.08)^{10} - 1}{0.08} \right] = \$ 21729,84$$

Segundo Método

Llevando cada Valor Presente a Valor Futuro, usaríamos la fórmula 3.1 varias veces:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + \dots + F_{10}$$

$$F = P_1 (1+i)^9 + P_2 (1+i)^8 + P_3 (1+i)^7 + P_4 (1+i)^6 + \dots + P_{10} (1+i)^0$$

$$F = 1500 * 1,08^9 + 1500 * 1,08^8 + 1500 * 1,08^7 + 1500 * 1,08^6 + \dots + 1500 * 1,08^0$$

$$F = \$ 21729,84$$

Ejercicio resuelto 5.9

¿Cuánto dinero deberá depositarse al final de cada año durante 12 años, comenzando el próximo año en un fondo que ascenderá a \$ 120000?. Asuma una tasa de interés del 5% anual.

Se ilustra el enunciado en la Figura 5.16

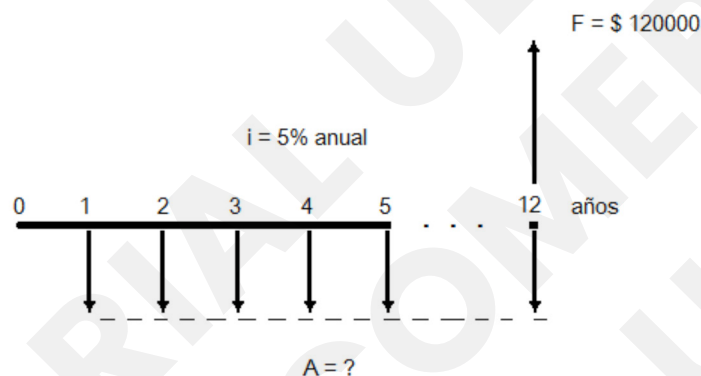


Figura 5.16

Utilizando la fórmula 5.4:

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 120000 \left[\frac{0.05}{(1+0.05)^{12} - 1} \right] = \$ 7539,05$$

5.6 Interpolación en tablas con factores de interés compuesto

Es común utilizar las tablas de factores de interés compuesto y con ellas hacer interpolación. Esto se hace para encontrar un valor de n (número de períodos) o un valor de i (tasa de interés) que no esté explícito en la tabla y que esté entre 2 valores conocidos.

Este método se explica en los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 5.10

Encontrar por interpolación ó usando la fórmula el valor del factor (A/P, 7.3%, 10)

Primer método

Usando interpolación.

n=10 :

	A/P
7%	0,14238
7,3%	x
8%	0,14903

$$\frac{7,3 - 7}{8 - 7} = \frac{x - 0,14238}{0,14903 - 0,14238}$$

$$\frac{0,3}{1} = \frac{x - 0,14238}{0,00665} \quad \therefore \quad 0,001995 = x - 0,14238 \quad \therefore \quad x = 0,144375$$

Segundo Método

Usando interpolación:

n=10 :

	A/P
7%	0,14238
7,3%	x
8%	0,14903

$$\frac{0,073 - 0,07}{0,08 - 0,07} = \frac{x - 0,14238}{0,14903 - 0,14238}$$

$$\frac{0,003}{0,01} = \frac{x - 0,14238}{0,00665} \quad \therefore \quad 0,3 = \frac{x - 0,14238}{0,00665} \quad \therefore \quad x = 0,144375$$

Tercer método

Usando la fórmula:

$$(A/P, i, n) = \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$(A/P, 7.3\%, 10) = \frac{0,073}{1 - (1 + 0,073)^{-10}}$$

$$(A/P, 7.3\%, 10) = 0,1443583$$

Ejercicio resuelto 5.11

Encontrar por interpolación ó usando la fórmula el valor del factor (A/F, 6%, 52)

Primer Método

Usando interpolación:

i=6% :

	A/F
50	0,00344
52	x
55	0,00254

$$\frac{52 - 50}{55 - 50} = \frac{x - 0,00344}{0,00254 - 0,00344}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{x - 0,00344}{-0,0009} \quad \therefore -0,0018 = 5x - 0,0172 \quad \therefore 0,0154 = 5x \quad \therefore x = 0,00308$$

Segundo Método

Usando la fórmula:

$$(A/F, i, n) = \frac{i}{(1 + i)^n - 1}$$

$$(A/F, 6\%, 52) = \frac{0,06}{(1 + 0,06)^{52} - 1} = 0,003046$$

Ejercicio resuelto 5.12

Un ejecutivo desea recibir \$ 5000 dentro de 5 años y para esto requiere invertir \$ 3000.

¿Cuál será la tasa de interés considerada?

Se ilustra el enunciado en la Figura 5.17

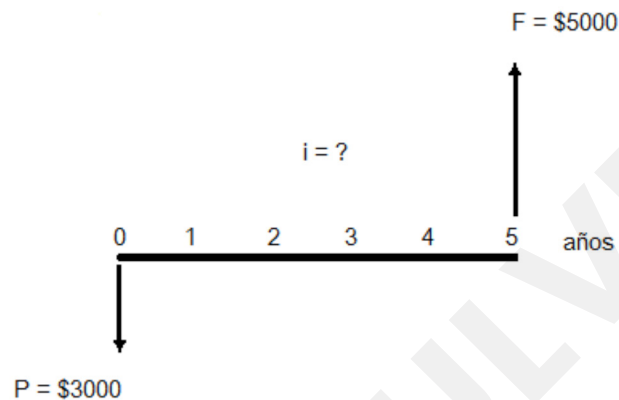


Figura 5.17

Primer Método

Utilizando la fórmula 3.1:

$$F = P (1+i)^n$$

$$5000 = 3000 (1+i)^5$$

$$1, \bar{6} = (1+i)^5$$

$$\sqrt[5]{1, \bar{6}} = \sqrt[5]{(1+i)^5} \quad \therefore \quad i = \sqrt[5]{1, \bar{6}} - 1 = 0,1075 \quad \therefore \quad i = 10,75\% \text{ anual}$$

Segundo Método

Usando factores de interés compuesto e interpolación:

$$F = P (F/P, i\%, n)$$

$$5000 = 3000 (F/P, i\%, n)$$

$$1, \bar{6} = (F/P, i\%, 5)$$

n=5 :

	F/P
10%	1,6105
i	1,6667
11%	1,6851

$$\frac{i - 10}{11 - 10} = \frac{1,6667 - 1,6105}{1,6851 - 1,6105}$$

$$i - 10 = 0,75335 \quad \therefore \quad i = 10,75\%$$

Ejercicio resuelto 5.13

Un padre abona dinero a un Tecnológico antes que su hija termine el colegio con el fin de asegurar los estudios de pregrado de la estudiante. El padre deberá abonar \$ 700 anuales durante los 8 años comenzando dentro de un año. ¿A qué tasa de interés estarán sometidos dichos abonos para llegar a valorarse en \$ 8000 luego de los 8 años?

Se ilustra el enunciado en la Figura 5.18.

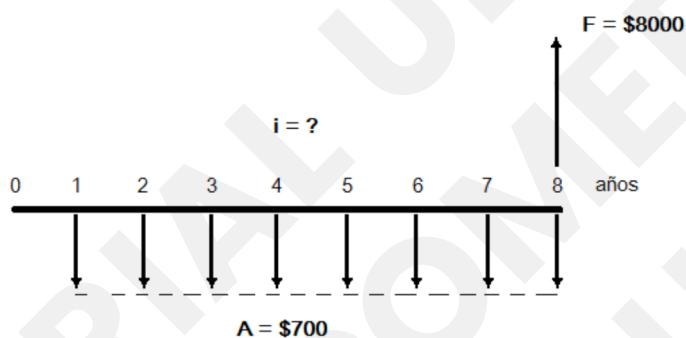


Figura 5.18

Utilizando la fórmula 5.4:

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = F (A/F, i, n)$$

$$700 = 8000 (A/F, i, 8)$$

$$(A/F, i, 8) = 0,0875$$

n=8 :

	A/F
9%	0,09067
<i>i</i>	0,0875
10%	0,08744

$$\frac{10 - 9}{i - 9} = \frac{0.08744 - 0.09067}{0.0875 - 0.09067}$$

$$\frac{1}{i - 9} = 1,018927445 \quad \therefore \quad 1 = 1,018927445 i - 9,170347003 \quad \therefore \quad i = 9,98\% \text{ anual}$$

Ejercicio resuelto 5.14

¿En cuánto tiempo se duplicarán \$ 1000 si la tasa de interés es del 5% anual?

Primer Método

Usando la Regla de los 72

$$72 / 5 = 14,4 \text{ años}$$

Segundo Método

Usando la fórmula 3.1

$$F = P (1+i)^n$$

$$2000 = 1000 (1+0,05)^n$$

$$2 = 1,05^n \quad \therefore \quad n = \log_{1,05} 2 = 14,2 \text{ años}$$

Tercer Método

Usando interpolación en tablas de factores de interés compuesto:

$$F = P (F/P, 5\%, n)$$

$$2000 = 1000 (F/P, 5\%, n)$$

$$2 = (F/P, 5\%, n)$$

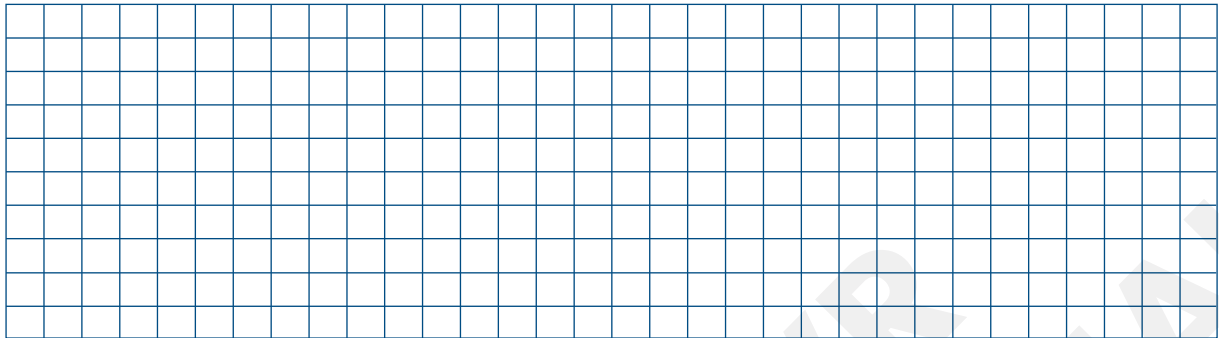
i=5% :

	<i>F/P</i>
14	1,9799
<i>n</i>	2
15	2,0789
$\frac{n - 14}{15 - 14}$	$\frac{2 - 1,9799}{2,0789 - 1,9799}$

$$n - 14 = 0,203 \quad \therefore \quad n = 14,203 \text{ años}$$

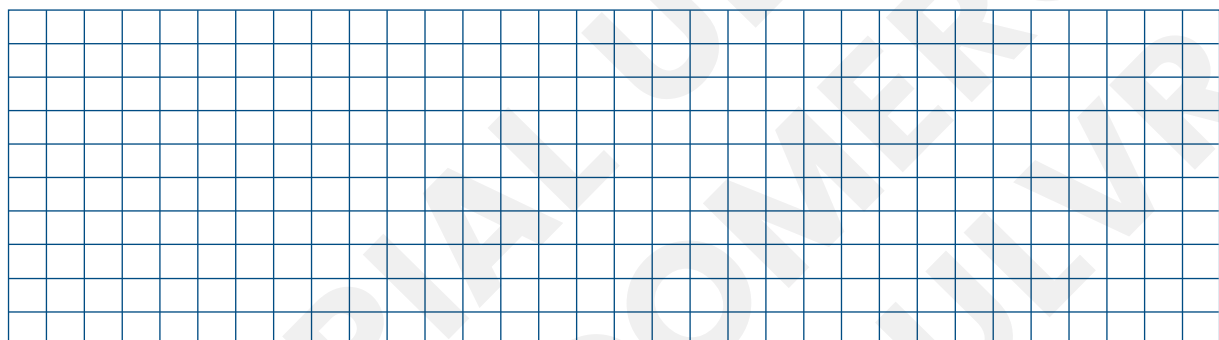
7. Usando interpolación, determine el valor del siguiente factor: (P/A, 5%, 38)

R/. 16,85



8. Usando interpolación, determine el valor del siguiente factor: (A/P, 8.5%, 10)

R/. 0,1524



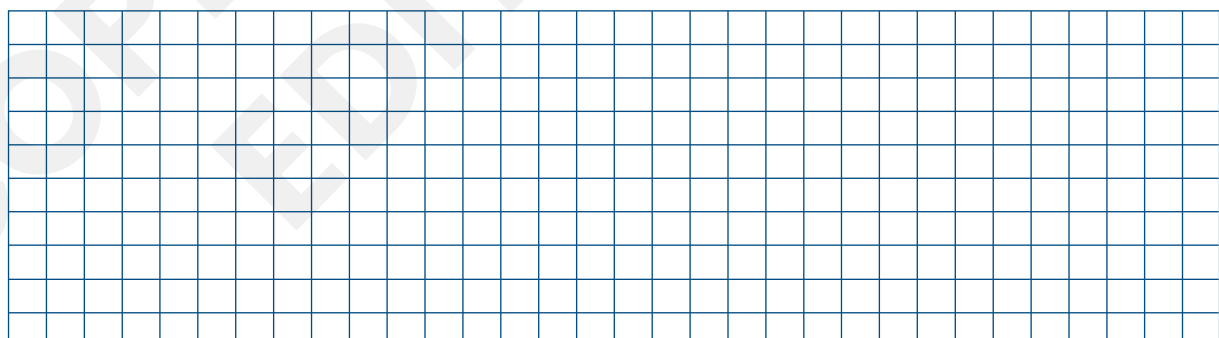
9. Considerando la tabla 5.2 donde se muestran los ingresos y gastos de la Empresa GMB, calcule el valor presente de los mismos si la tasa de interés es del 10% nominal semanal.

R/. \$ 10207,54

Datos para el Problema propuesto 9

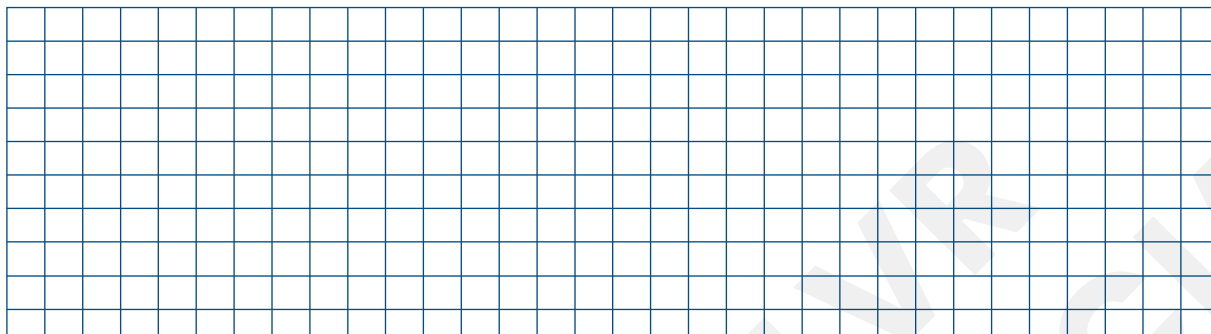
Semestre	Ingresos	Gastos
0	15000	4000
1-4	5000	3500
5-8	6500	5000
9-12	8000	6500

Tabla 5.2



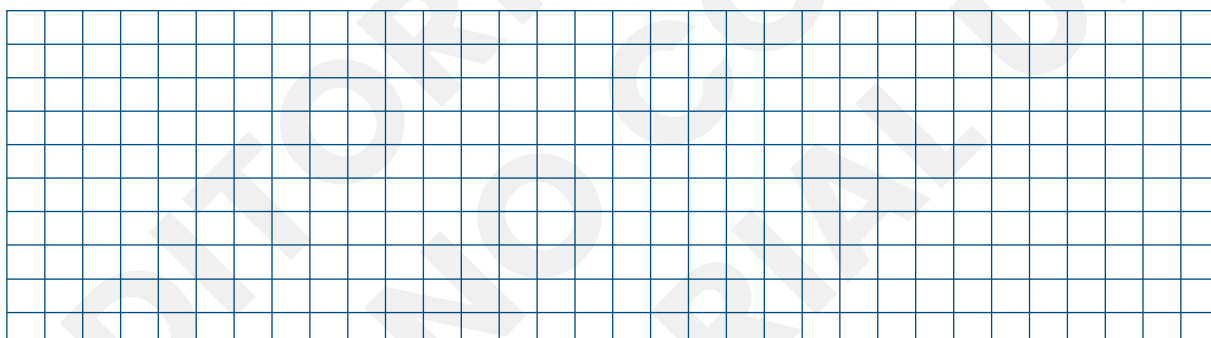
10. Joaquín Gallegos invierte durante 30 años en un seguro privado. Cuando se jubile, el seguro le daría \$1676 mensuales durante 15 años con una tasa de interés compuesta por semestres de 18,6%. Si Joaquín prefiriera que le den el equivalente a estas rentas todo al inicio de su jubilación, ¿cuánto dinero recibiría?

R/. \$ 104456,04



11. Determine cuántos pagos trimestrales de \$1400 realizados al final de cada trimestre serán necesarios para pagar el precio de un auto sedán de lujo que se compró con una entrada de \$10000 y un crédito por \$30000. Asuma que el concesionario incluye un interés del 16% anual capitalizable trimestralmente.

R/. 49,61 pagos trimestrales de \$1400 ó 49 pagos trimestrales de \$1400 y un pago de \$860,1 luego de 1 mes 26 días.



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Qué entiende por una anualidad y por qué se caracterizan?
2. Para que un pago o una renta se considere anualidad, ¿éstos deben ser siempre anuales?
3. Dé 3 ejemplos de pagos o rentas que se comporten como anualidades en la vida real.
4. ¿Cómo se representan las anualidades en un DFC?
5. Mencione los distintos tipos de anualidades y explique por qué se caracterizan cada una.
6. Deduzca la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Ordinaria o Vencida.
7. Deduzca la fórmula de Valor Futuro para una Anualidad Ordinaria o Vencida.
8. ¿A qué se conoce como Factores de Interés Compuesto? Mencione ejemplos si lo considera necesario.
9. ¿Qué significa la nomenclatura: $A(P/A, 15\%, 4)$?
10. Determine por interpolación o utilizando la fórmula respectiva el valor de los siguientes factores de interés compuesto:
 - a. $(P/F, 9.3\%, 4)$
 - b. $(F/P, 5\%, 53)$
11. ¿A qué se llama interpolación?. Dé un ejemplo si lo considera necesario.

Objetivos:

- Definir a las Anualidades Anticipadas.
- Deducir las fórmulas respectivas.
- Ilustrar con ejemplos claros y prácticos este tipo de Anualidades.

6.1 Definición

Son aquellas en las que los pagos se hacen al inicio de cada de período.

Nótese que los pagos pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

A manera de ejemplo, asuma que usted recibe un préstamo de un valor P , que lo pagará con n abonos de un valor A al inicio de cada período a una tasa de interés i . El ejemplo dado se ilustra en la Figura 6.1.

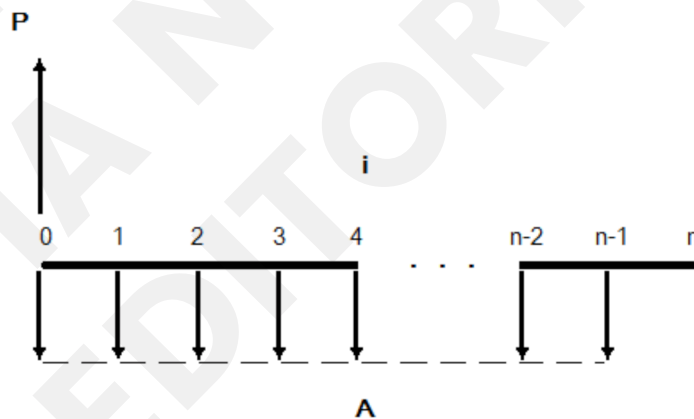


Figura 6.1

6.2 Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Anticipada

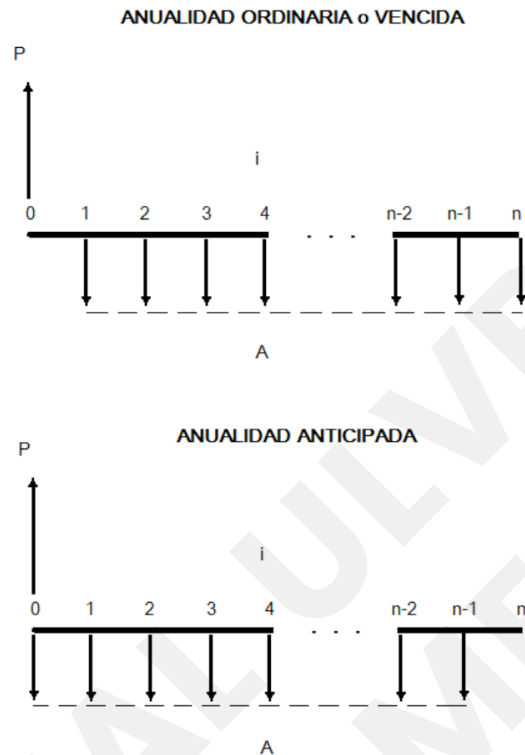


Figura 6.2

Considere las Anualidades Ordinaria y Anticipada de la Figura 6.2. En el caso de la Anualidad Anticipada:

$$P = A(P/A, i\%, n-1) + A$$

$$P = A [(P/A, i\%, n-1) + 1] \quad (6.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1 \right] \quad (6.2)$$

Ejercicio resuelto 6.1

Un almacén vende equipos tecnológicos, entre ellos, laptops a un precio de \$ 1500 de contado. Se oferta su venta a plazos en 12 meses, sin entrada, considerando una tasa de interés del 24% capitalizable mensualmente. Hallar el valor de los pagos mensuales.

Asuma que el primer pago se realiza con la entrega del dispositivo.

$i = 24\%$ capitalizable mensualmente

$i = 24\% / 12$ mensual = 2% mensual

El texto del problema se ilustra en la Figura 6.3.

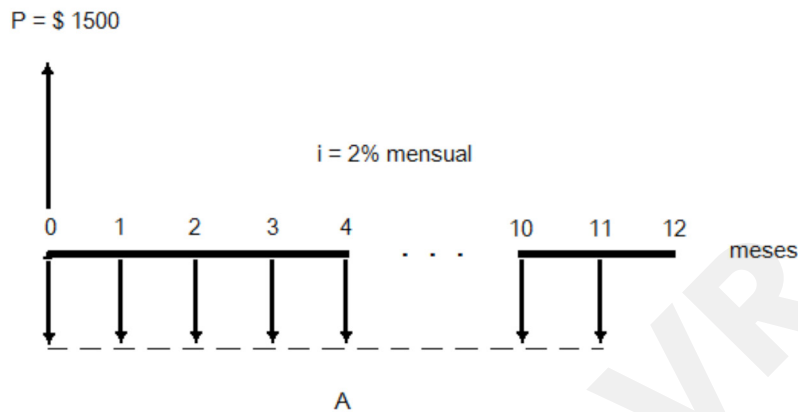


Figura 6.3

Usando la fórmula 6.1:

$$P = A [(P/A, i\%, n-1) + 1]$$

$$1500 = A [(P/A, 2\%, 12 - 1) + 1]$$

$$1500 = A [(P/A, 2\%, 11) + 1]$$

$$1500 = A [9,7868 + 1]$$

$$1500 = 10,7868 A \quad \therefore A = \$139,05$$

Ejercicio resuelto 6.2

Un comerciante contempla una estrategia de ventas que consiste en ofrecer TVs LCD que valen \$ 2500 de contado, en cuotas mensuales de \$ 170 cada una, sin cuota inicial.

Hallar el número de pagos que deben realizarse, si se realiza un recargo del 18% de interés nominal mensual.

Asuma que al pagar la primera cuota se retira el producto.

$$i = 18\% \text{ nominal mensual}$$

$$i = 18\% / 12 \text{ mensual} = 1,5\% \text{ mensual}$$

El enunciado se ilustra en la Figura 6.4.

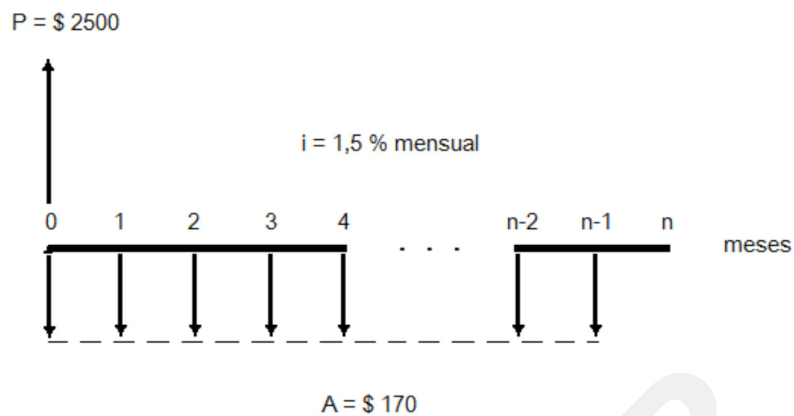


Figura 6.4

Usando la fórmula 6.1:

$$P = A [(P/A, i\%, n-1) + 1]$$

$$2500 = 170 [(P/A, 1.5\%, n-1) + 1]$$

$$14,7 = (P/A, 1.5\%, n-1) + 1$$

$$(P/A, 1.5\%, n-1) = 13,7$$

$i=1,5\%$:

	P/A
15	13,2432
$n-1$	13,7
16	14,1313
$\frac{n-1-15}{16-15}$	$\frac{13,7-13,2432}{14,1313-13,2432}$

$$n - 16 = \frac{0,4568}{0,8881}$$

$$n = 16,5143$$

El resultado se puede interpretar como 16 pagos de \$170 y el último pago de $0,5143 * \$170 = \$ 87,43$

Ejercicio resuelto 6.3

Un hombre pide prestado \$250000 a una Institución Financiera y éstos se pagan con 10 pagos semestrales (por semestre anticipado) de \$30000. ¿Qué tasa de interés se ha considerado?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 6.5.

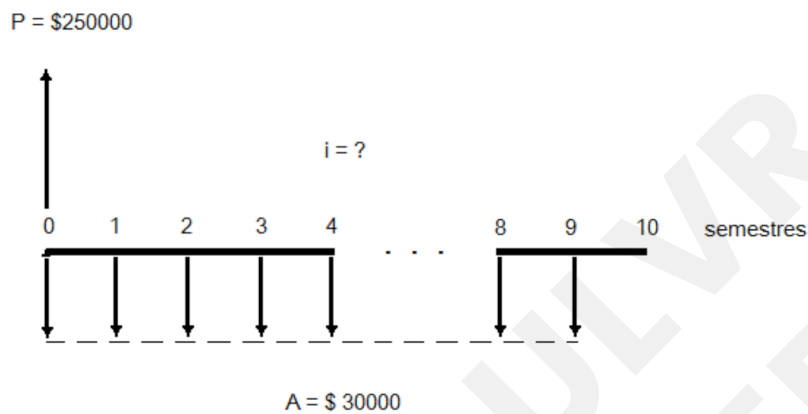


Figura 6.5

Usando la fórmula 6.1:

$$P = A [(P/A, i\%, n-1) + 1]$$

$$250000 = 30000 [(P/A, i\%, 10-1) + 1]$$

$$8, \bar{3} = (P/A, i\%, 9) + 1$$

$$(P/A, i\%, 9) = 7, \bar{3}$$

n = 9 :

	P/A
4%	7,4353
i	7, $\bar{3}$
5%	7,1078

$$\frac{i - 4}{5 - 4} = \frac{7, \bar{3} - 7,4353}{7,1078 - 7,4353}$$

$$i - 4 = 0,311348$$

$$i = 4,31\% \text{ semestral}$$

$$i = 8,62\% \text{ anual compuesta semestral}$$

6.3 Deducción de la fórmula de Valor Futuro para una Anualidad Anticipada

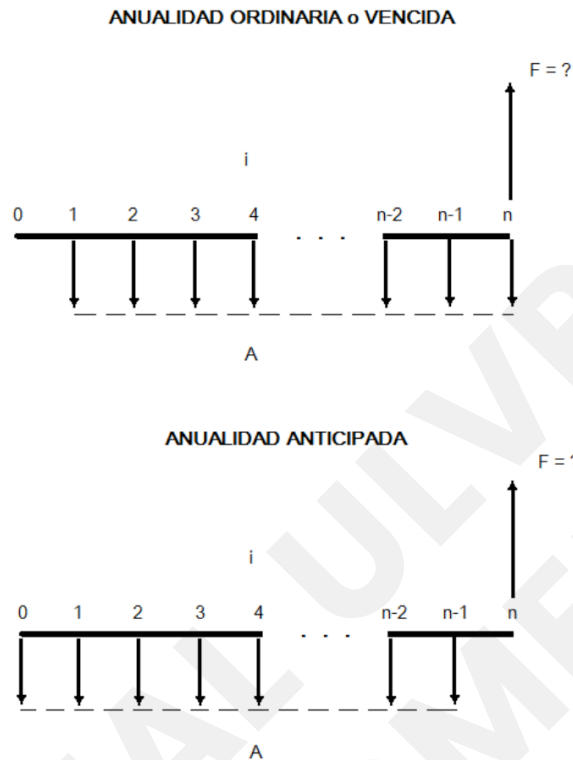


Figura 6.6

Considere las Anualidades Ordinaria y Vencida de la Figura 6.6. En el caso de la Anualidad Anticipada:

$$F = A (F/A, i\%, n+1) - A$$

$$F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1] \quad (6.3)$$

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right] \quad (6.4)$$

Ejercicio resuelto 6.4

¿En cuántas quincenas se llegará a tener \$60000 en una inversión que paga intereses del 12% anual convertible quincenalmente, si se depositan \$3500 al inicio de cada quincena?

$i = 12\%$ anual convertible quincenal

$i = 12\% / 24 = 0,5\%$ quincenal

El enunciado se ilustra en la Figura 6.7.

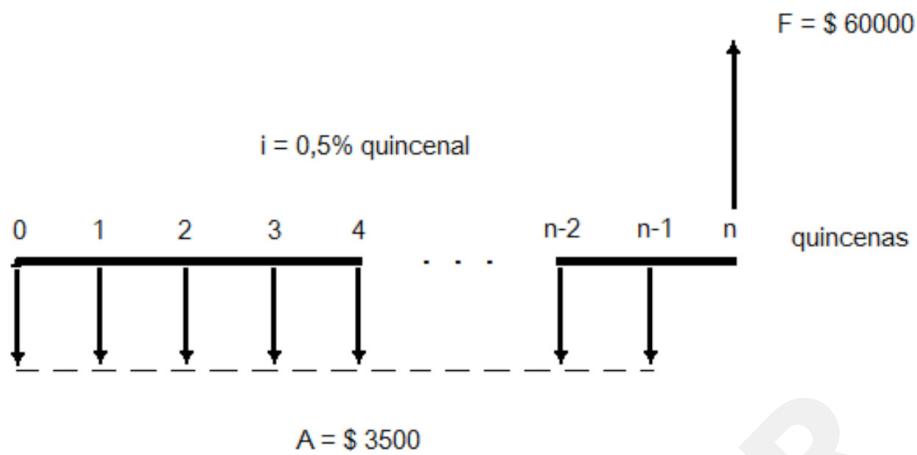


Figura 6.7

Usando la fórmula 6.4:

$$F = A \left[\frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$60000 = 3500 \left[\frac{(1 + 0,005)^{n+1} - 1}{0,005} - 1 \right]$$

$$17,14285714 = \frac{1,005^{n+1} - 1}{0,005} - 1$$

$$18,14285714 = \frac{1,005^{n+1} - 1}{0,005}$$

$$0,090714286 = 1,005^{n+1} - 1$$

$$1,090714286 = 1,005^{n+1}$$

$$n + 1 = \log_{1,005} 1,090714286$$

$$n = 16,4 \text{ quincenas}$$

Ejercicio resuelto 6.5

Un inversionista deposita al principio de cada año \$5500 en una cuenta que paga el 8% de intereses. ¿A cuánto ascenderán sus depósitos al cabo de 7 años?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 6.8.

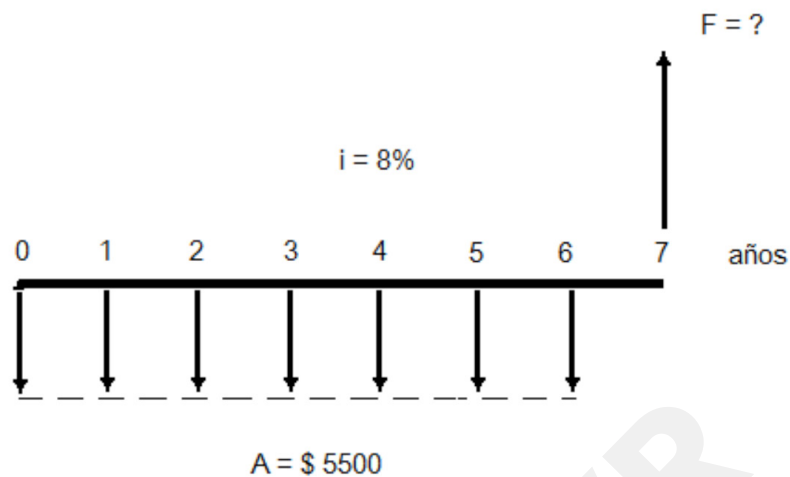


Figura 6.8

Usando la fórmula 6.3:

$$F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1]$$

$$F = 5500 [(F/A, 8\%, 7+1) - 1]$$

$$F = 5500 [(F/A, 8\%, 8) - 1]$$

$$F = 5500 [10,6366 - 1] = 5500 * 9,6366 = \$ 53001,3$$

Ejercicio resuelto 6.6

¿Qué tasa de interés anual convertible mensual le cobran a Pedro Jiménez si para recuperar un documento con valor nominal de \$ 28000, hace 12 pagos mensuales anticipados de \$ 2000?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 6.9.

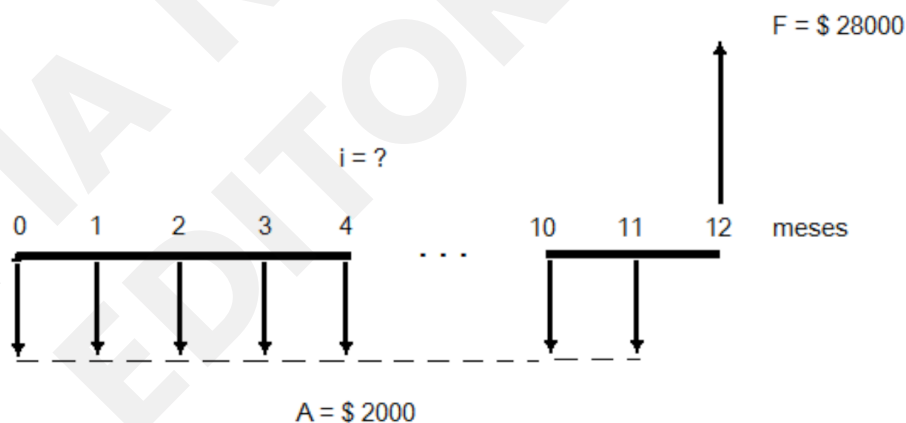


Figura 6.9

Primer Método

$$F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1]$$

En este caso, $i\%$ representa la tasa mensual

$$28000 = 2000 [(F/A, i\%, 12+1) - 1]$$

$$280000 = 2000 [(F/A, i\%, 13) - 1]$$

$$14 = (F/A, i\%, 13) - 1$$

$$15 = (F/A, i\%, 13)$$

n = 13 :

	F/A
2%	14,6803
i	15
3%	15,6178

$$\frac{i - 2}{3 - 2} = \frac{15 - 14,6803}{15,6178 - 14,6803}$$

$$i - 2 = 0,34101\bar{3}$$

$$i = 2,34\% \text{ mensual}$$

$$i = 28,08\% \text{ anual compuesta mensual}$$

Segundo Método

Sea:

$$F = A [(F/A, i\%/12, n+1) - 1]$$

En este caso, $i\%$ representa la tasa anual compuesta mensual

$$28000 = 2000 [(F/A, i\%/12, 12+1) - 1]$$

$$28000 = 2000 [(F/A, i\%/12, 13) - 1]$$

$$14 = (F/A, i\%/12, 13) - 1$$

$$15 = (F/A, i\%/12, 13)$$

$n = 13 :$

	F/A
2%	14,6803
$i / 12$	15
3%	15,6178

$$\frac{\frac{i}{12} - 2}{3 - 2} = \frac{15 - 14,6803}{15,6178 - 14,6803}$$

$$\frac{i}{12} - 2 = 0,3410\bar{3}$$

$$i = 12 * 2,3410\bar{3}$$

$i = 28,09\%$ anual compuesta mensual

Ejercicio resuelto 6.7

¿Cuál es el monto (valor futuro) que se llegaría a tener en 5 años, si se depositan \$ 1500 al inicio de cada trimestre en una Institución Financiera que paga una tasa de interés del 12% anual convertible por trimestres?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 6.10.

$i = 12\%$ anual convertible por trimestres

$i = 12\% / 4$ trimestral = 3% trimestral

? trimestres = 5 años * $\frac{4 \text{ trimestres}}{1 \text{ año}}$ = 20 trimestres

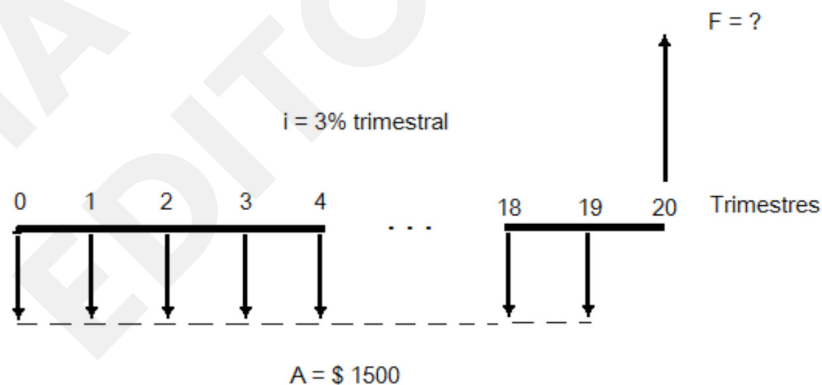


Figura 6.10

Primer Método

Usando las Tablas de Factores de Interés Compuesto (Apéndice F):

$$F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1]$$

$$F = 1500 [(F/A, 3\%, 20+1) - 1]$$

$$F = 1500 [(F/A, 3\%, 21) - 1]$$

$$F = 1500 [28,6765 - 1]$$

$$F = 1500 * 27,6765 = \$ 41514,75$$

Segundo Método

Usando la fórmula 6.4:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

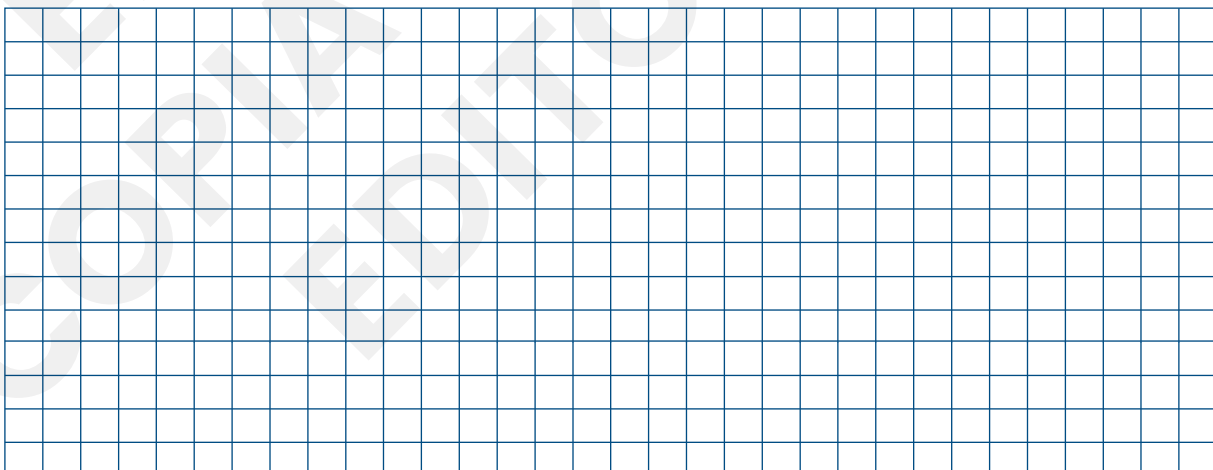
$$F = 1500 \left[\frac{(1+0,03)^{20+1} - 1}{0,03} - 1 \right]$$

$$F = 1500 \left[\frac{1,03^{21} - 1}{0,03} - 1 \right] = \$ 41514,75$$

Problemas propuestos

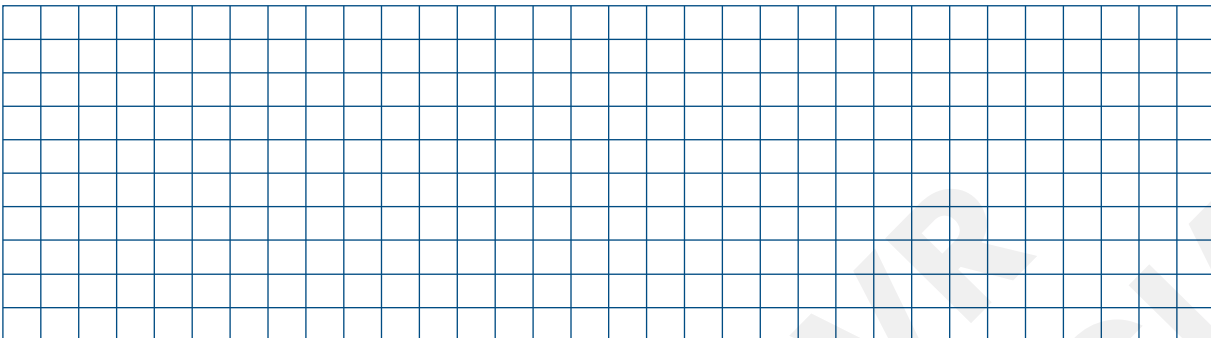
1. ¿Cuál es el valor presente equivalente a 8 rentas semestrales anticipadas de \$919 con intereses del 16% anual capitalizable trimestralmente?

R/. \$ 5677,58



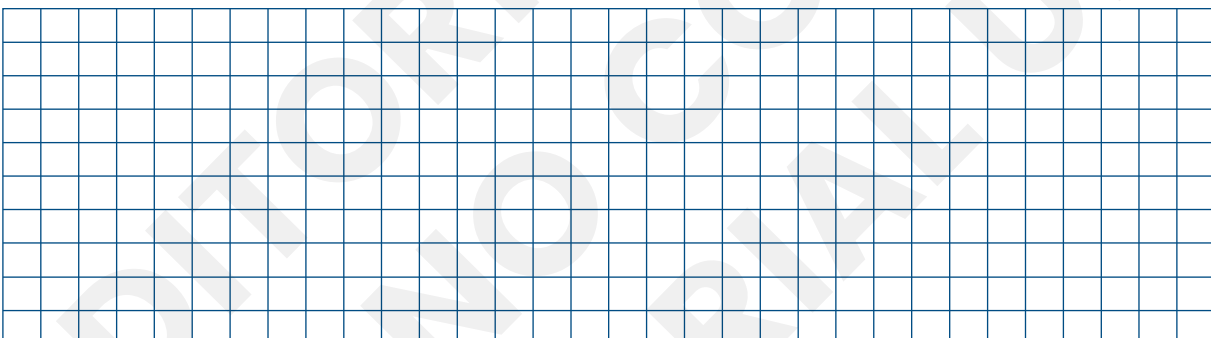
5. Determine el valor que se acumula en 12 trimestres si se realizan depósitos de \$ 1990 al inicio de cada trimestre en una cuenta que genera una tasa del 12% convertible por trimestres.

R/. \$ 29089,42



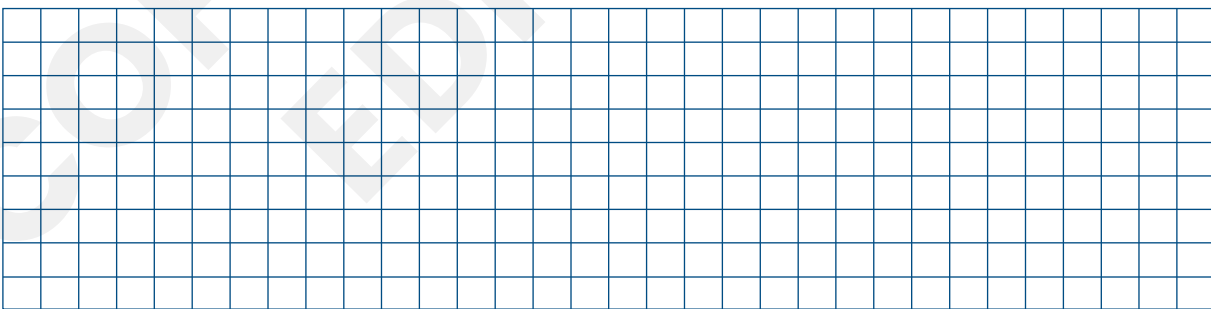
6. Juan Camacho recibe un préstamo de \$ 5000. En vista de que el préstamo lo recibe de un amigo deberá cancelarlo considerando sólo un interés simple del 10% anual teniendo como plazo para hacerlo 10 meses. Para ser puntual en el pago Juan abre una cuenta de ahorros en una Financiera el mismo día que recibe el préstamo para realizar en ella depósitos quincenales durante los 10 meses. La cuenta le paga un interés del 12% nominal quincenal. ¿De qué valor son los depósitos quincenales anticipados que Juan debe realizar durante 10 meses para llegar a tener los \$ 5000 con los respectivos intereses para poder pagar el préstamo en la fecha debida?

R/. \$ 257



7. Daniel ahorra \$ 257 quincenalmente en una cuenta bancaria. El banco le otorga un interés el 12% nominal quincenal. ¿Cuánto podrá retirar de dicha institución luego de 20 quincenas?

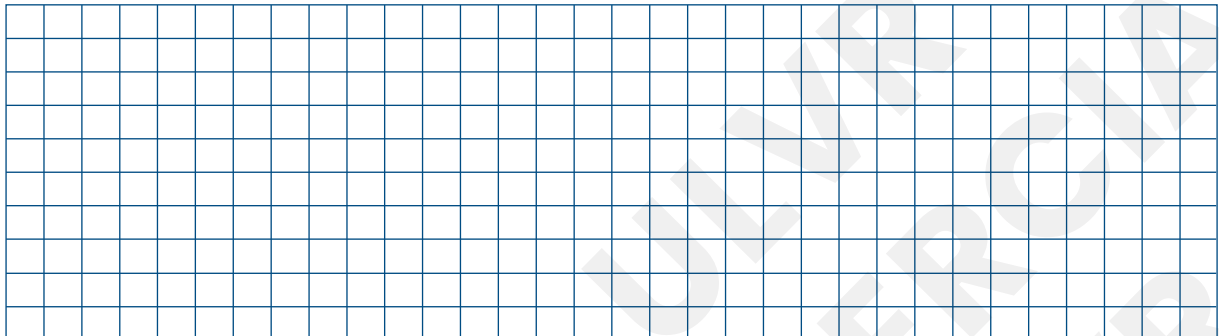
R/. \$ 5416,67



8. Lisa adquiere un terreno de 100 m^2 y llega a pagar por el mismo \$ 54432 haciendo abonos anticipados de \$ 1423,61. Si se considera un interés del 16,8% anual convertible semanal.

- a. ¿Cuántos abonos semanales anticipados realizó?
- b. ¿En cuántos meses logró cancelar el terreno?

R. a) 36 abonos semanales ; b) 9 meses



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Cuándo una Anualidad se considera anticipada. Qué requisito(s) debe reunir?
2. Dé 3 ejemplos de Anualidades Anticipadas de la vida real.
3. ¿Cuál(es) es(son) la(s) fórmula(s) para encontrar el Valor Presente de una Anualidad Anticipada y su respectivo DFC?
4. Explique porqué en la fórmula $P = A [(P/A, i\%, n-1) + 1]$, considerada para Anualidades Anticipadas, la variable n está restada en una unidad.
5. Explique porqué en la fórmula $F = A [(F/A, i\%, n+1) - 1]$, considerada para Anualidades Anticipadas, la variable n está sumada en una unidad.
6. ¿Cuál(es) es(son) la(s) fórmula(s) para encontrar el Valor Futuro de una Anualidad Anticipada y su respectivo DFC?

Objetivos:

- Definir lo que son Anualidades Diferidas e ilustrarlas en DFCs.
- Deducir la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Diferida.
- Resolver varios ejercicios que contemplen Anualidades Diferidas.

7.1 Definición

Son aquellas en las que la primera renta o el primer pago se realiza después de transcurrido un cierto número de períodos.

Se da cuando:

- Los pagos se aplazan por un tiempo o existe un período de gracia antes de realizar los pagos o
- Se hace una inversión y ésta comienza a producir luego de un tiempo

Nótese que los pagos pueden ser: diarios, quincenales, mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc.

Consideremos que una persona invierte \$ 6500 hoy a una cierta tasa de interés nominal semestral y 4 semestres después comienza a recibir rentas de \$ 1000 por 7 veces consecutivas. Este enunciado se ilustra en la Figura 7.1.

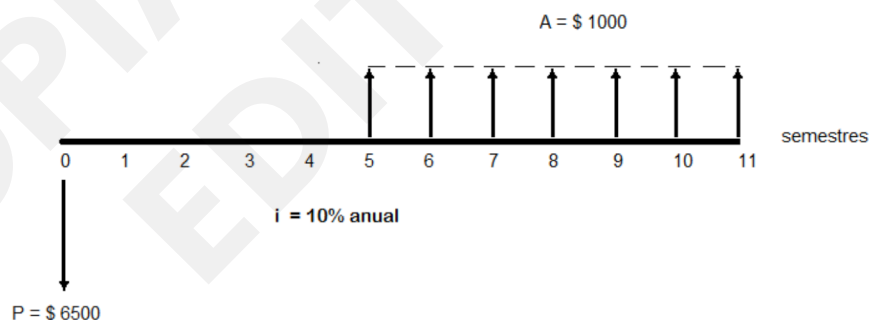


Figura 7.1

7.2 Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Diferida

En la figura 7.2, sean:

k intervalo de aplazamiento (Períodos de gracia)

$k = 7$, como se indica en la Figura 7.2, los pagos comienzan a hacerse 7 períodos después.

n número de pagos o rentas que forman la anualidad

$n=16$, para el ejemplo de la Figura 7.2.

P' representa el Valor Presente de la Anualidad Diferida. Se ubica un período antes que la misma. Véase Figura 7.2.

P representa el Valor Presente a la fecha de hoy de la Anualidad Diferida o el Valor Presente del “Valor Futuro” P' . Véase Figura 7.2.

Para encontrar cualquier parámetro en una anualidad diferida, se debe recordar que **las Anualidades Diferidas se tratan como Anualidades Ordinarias o Vencidas.**

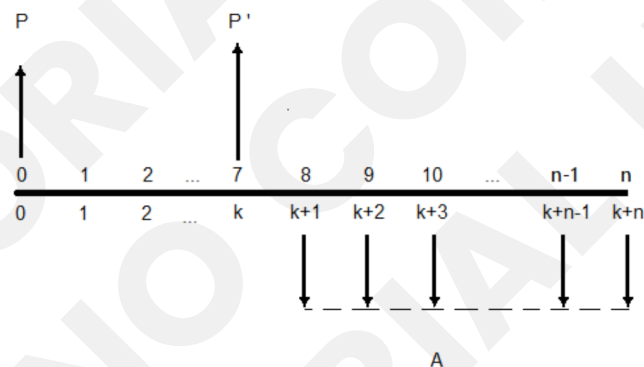


Figura 7.2

Consideremos la siguiente fórmula:

$$P = \underbrace{A (P/A, i\%, n)}_{P'} (P/F, i\%, k) \quad (7.1)$$

La introducción del factor $(P/F, i\%, k)$ en la Fórmula 7.1 se conoce como Uso de Factores múltiples pues para hallar el Valor Presente de esta Anualidad Diferida se están usando 2 factores que son:

$$(P/A, i\%, n) \text{ y } (P/F, i\%, k)$$

Reemplazando cada factor por su fórmula respectiva, tendríamos:

$$P = A \underbrace{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]}_{P'} [1+i]^{-k} \quad (7.2)$$

Ejercicio resuelto 7.1

¿ Cuánto debe invertirse hoy en una cuenta ofertada por una Institución Financiera que paga el 8,4% de interés nominal mensual para retirar \$ 2500 cada mes durante 1 ½ año, haciendo el primer retiro 5 meses después de la inversión ?

El enunciado del problema 7.1 se ilustra en la Figura 7.3.

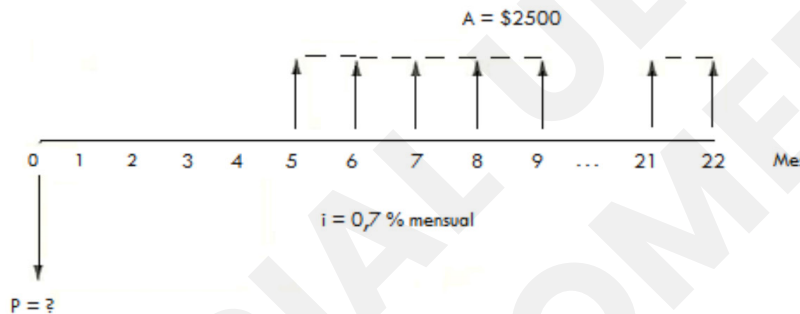


Figura 7.3

$i = 8,4\%$ nominal mensual

$i = 8,4\% / 12$ mensual = $0,7\%$ mensual

$$P = A (P/A, i\%, n) (P/F, i\%, k) \quad (7.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] [1+i]^{-k} \quad (7.2)$$

$$P = 2500 \left[\frac{1 - (1 + 0,007)^{-18}}{0,007} \right] [1 + 0,007]^{-4}$$

$$P = 2500 * 16,85686 * 0,97248 = \$ 40982,39$$

Ejercicio resuelto 7.2

Cierto almacén ofrece una promoción. La promoción consiste en cancelar la mercadería adquirida en 10 quincenas, empezando 3 meses después de que el cliente haya llevado consigo la mercancía, sin embargo puede llevarse de inmediato la mercadería.

¿Cuánto pagará quincenalmente un cliente, si el precio actual de la mercancía es de \$ 7500 y le recargan el 12% de interés anual capitalizable por quincenas?

El enunciado del problema 7.2 se ilustra en la Figura 7.4.

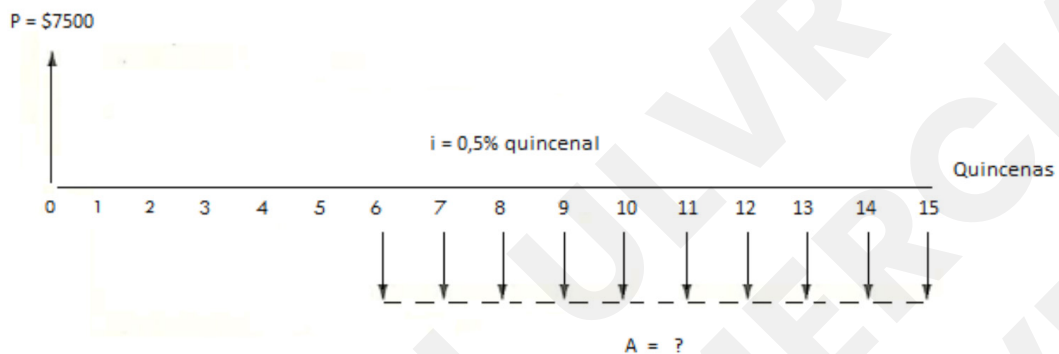


Figura 7.4

$i = 12\%$ anual capitalizable por quincenas

$i = 12\% / 24$ quincenal = 0,5% quincenal

1er Método:

$$P = A (P/A, i\%, n) (P/F, i\%, k) \quad (7.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] [1 + i]^{-k} \quad (7.2)$$

$$7500 = A \left[\frac{1 - (1 + 0,005)^{-10}}{0,005} \right] [1 + 0,005]^{-5}$$

$$7500 = A * 9,73041 * 0,97537$$

$$A = \$ 790,24$$

2do Método:

$$P' = A (P/A, i\%, n)$$

$$P' = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$P' = A \left[\frac{1 - (1 + 0,005)^{-10}}{0,005} \right]$$

$$P' = 9,73041 A$$

Considerando la fórmula 3.3:

$$P = F (1 + i)^{-n}$$

$$P = P' (1 + i)^{-n}$$

$$7500 = 9,73041 A * (1 + 0,005)^{-5}$$

$$7500 = 9,490756 A$$

$$A = \$ 790,24$$

Ejercicio resuelto 7.3

Se adquiere un auto de lujo con un pago inicial de \$50000 y 6 mensualidades de \$10000 cada una, pagando la primera 3 meses después de la compra.

¿Cuál es el precio de contado del auto, si se considera un interés del 24% compuesto por meses?

El enunciado del problema 7.3 se ilustra en la Figura 7.5

$$i = 24\% \text{ anual compuesto por meses}$$

$$i = 24\% / 12 \text{ mensual} = 2\% \text{ mensual}$$

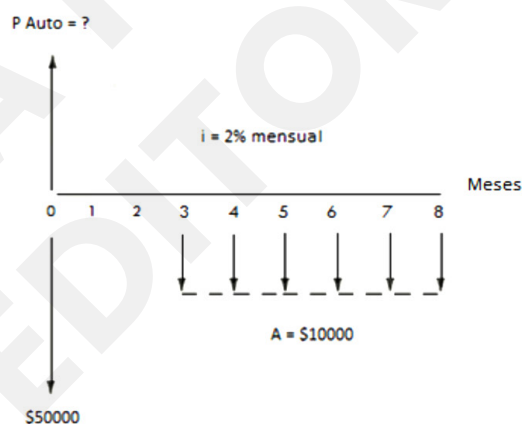


Figura 7.5

$$P_{Auto} = 50000 + P; \quad (1) \quad P: \text{Valor presente debido a la Anualidad diferida}$$

$$P = A (P/A, i\%, n) (P/F, i\%, k) \quad (7.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] [1 + i]^{-k} \quad (7.2)$$

$$P = 10000 \left[\frac{1 - (1 + 0,02)^{-6}}{0,02} \right] [1 + 0,02]^{-2}$$

$$P = \$ 53839,2 \quad (\text{Valor presente debido a la Anualidad diferida})$$

Remplazando el valor de P en la ecuación (1):

$$P_{Auto} = 50000 + P$$

$$P_{Auto} = 50000 + 53839,2 = \$ 103839,2$$

Ejercicio resuelto 7.4

Calcular el valor actual de un TV LCD que Comercial "SU KASA" oferta con 30 abonos semanales de \$25 haciendo el primero a 3 meses de la compra con intereses del 26% nominal semanal.

$$? \text{ semanas} = 3 \text{ meses} * \frac{1 \text{ año}}{12 \text{ meses}} * \frac{52 \text{ semanas}}{1 \text{ año}} = 13 \text{ semanas}$$

El enunciado del problema 7.4 se ilustra en la Figura 7.6

$$i = 26\% \text{ nominal semanal}$$

$$i = 26\% / 52 \text{ semanal} = 0,5\% \text{ semanal}$$

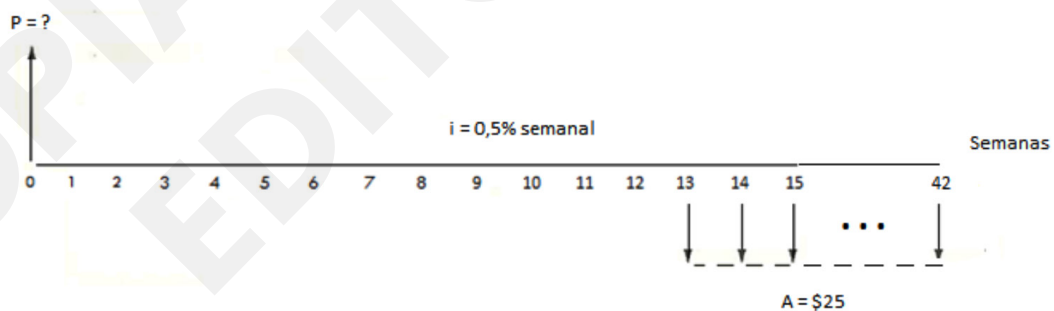


Figura 7.6

1er Método

$$P = A (P/A, i\%, n) (P/F, i\%, k) \quad (7.1)$$

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] [1 + i]^{-k} \quad (7.2)$$

$$P = 25 \left[\frac{1 - (1 + 0,005)^{-30}}{0,005} \right] (1 + 0,005)^{-12}$$

$$P = 25 * 27,7940 * 0,9419 = \$ 654,5$$

2do Método

$$P' = A (P/A, i\%, n)$$

$$P' = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

$$P' = 25 \left[\frac{1 - (1 + 0,005)^{-30}}{0,005} \right]$$

$$P' = 694,8513$$

De la fórmula 3.3:

$$P = F (1 + i)^{-n}$$

$$P = P' (1 + i)^{-n}$$

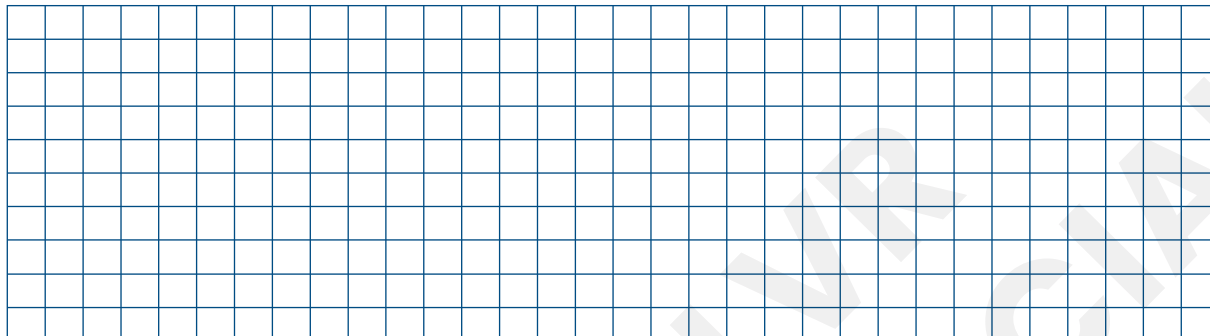
$$P = 694,8513 * (1 + 0,005)^{-12}$$

$$P = \$ 654,5$$

Problemas propuestos

- Martha Lara desea disponer durante 16 años de una renta de \$1500 mensuales empezando luego de 10 años. ¿Qué cantidad de dinero que debe depositar Martha luego de 5 años para tal efecto?. Considere una tasa de interés efectiva anual del 10%.

R/. \$ 89547,65



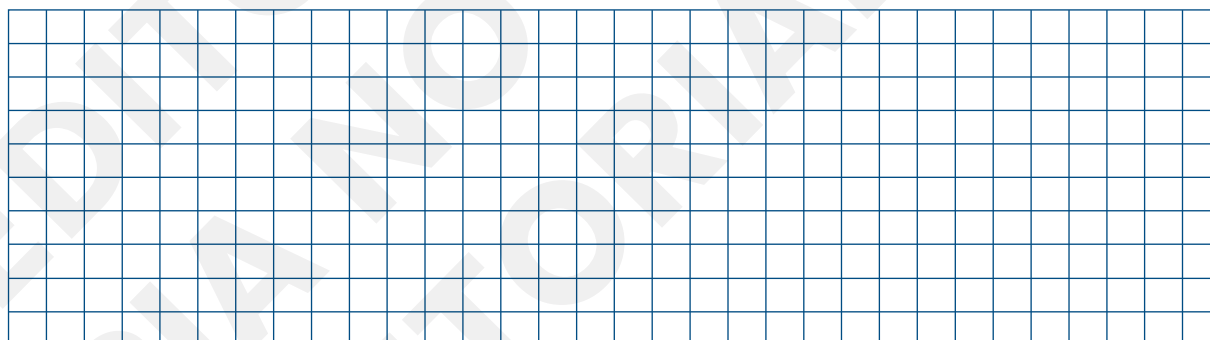
- Determine el Valor presente de los flujos que se originan de la Tabla 7.1 si se considera una tasa de interés del 9% anual convertible trimestral.

R/. \$ 20551,2

Datos para el Problema propuesto 2

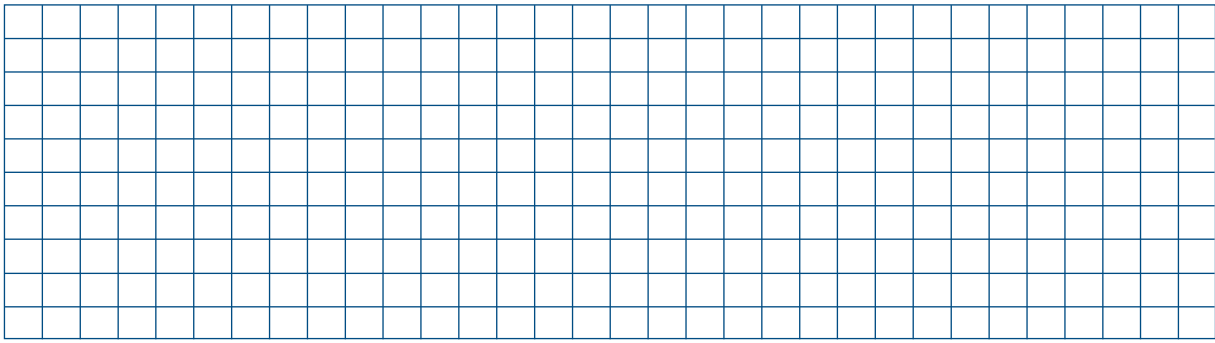
Año	Ingreso	Gasto
1-4	15000	12000
5-10	14000	10500

Tabla 7.1



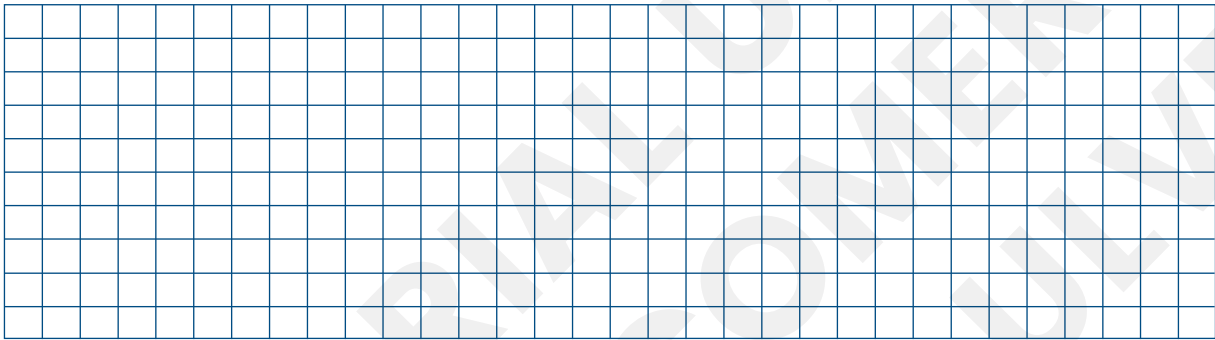
- Cierto almacén de la ciudad ofrece electrodomésticos en oferta. Uno de ellos, es un aire acondicionado de 24000 BTU con tecnología de punta a un precio de contado de \$ 1500. La oferta consiste en que si se lo paga a crédito deberán hacerse 12 pagos mensuales y se lo comienza a pagar luego de 4 quincenas de la adquisición considerando un interés del 12% nominal mensual. En el caso de comprarlo a crédito, calcule cuánto se pagaría por intereses.

R/. \$ 115,2



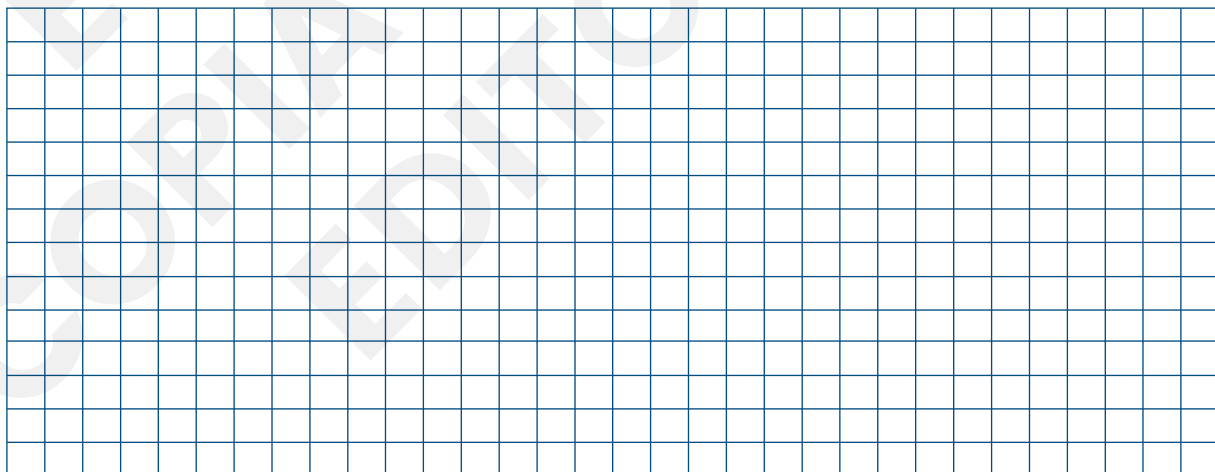
4. El dueño de un coffee - bar adquiere un TV LCD de 60 pulgadas. El precio de contado de dicho artefacto es \$ 10000. Por ser un tamaño no usual, el almacén le da unos meses de gracia para comenzar los pagos pues lo adquiere a crédito. Se compromete a pagar cuotas mensuales de \$ 1046,32 durante un año incluyendo un interés del 24,24% anual convertible mensualmente. ¿Cuántos meses de gracia le dio el almacén?

R/. 6 meses de gracia



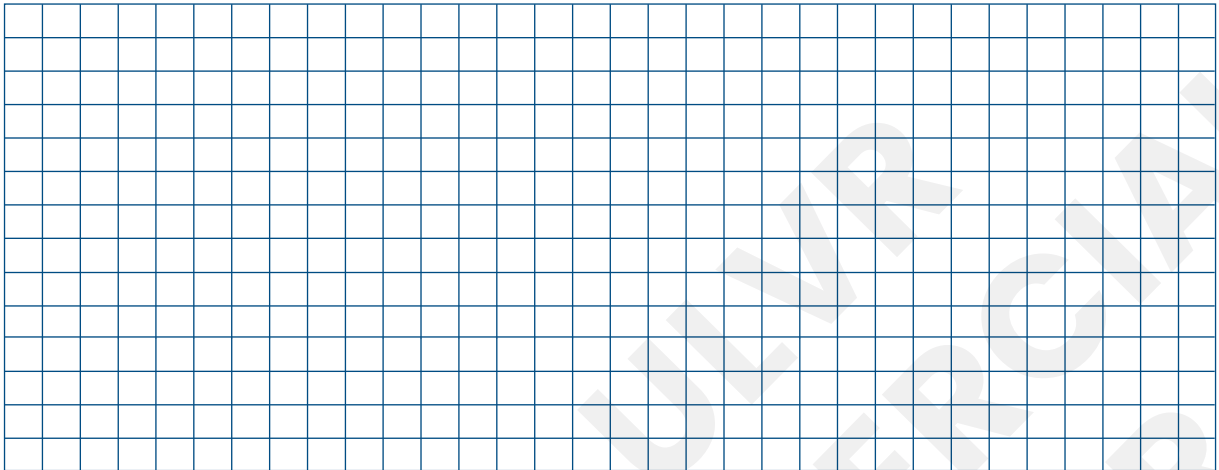
5. Un padre de familia abre una cuenta para solventar los gastos del primer año de universidad de uno de sus hijos. El día de la apertura de la cuenta deposita \$ 5000 y luego de 6 meses realiza 30 depósitos mensuales de \$ 500. Si se supone un interés del 36,6% nominal mensual, ¿cuánto representarían todos los depósitos realizados el día del último depósito?

R/. \$ 39459,56



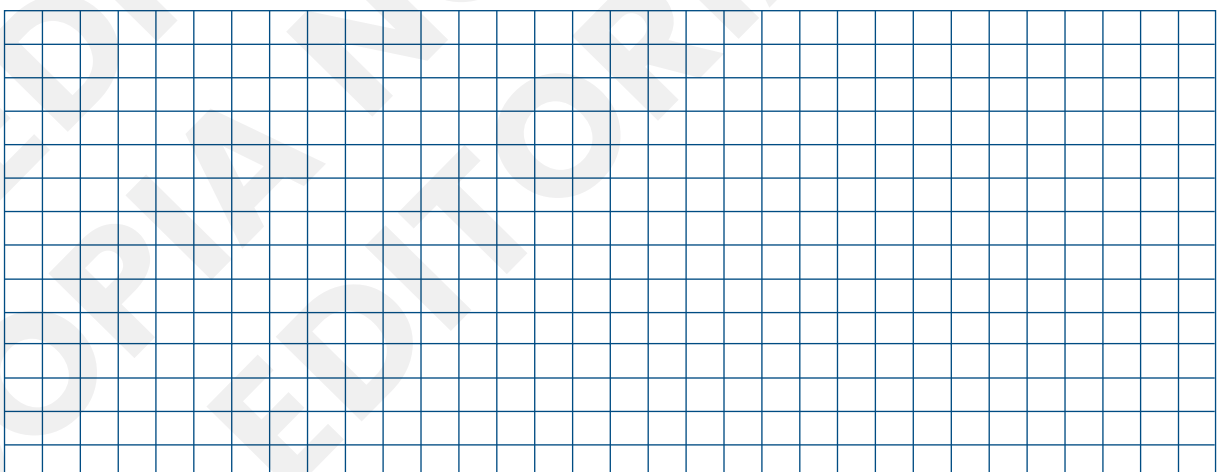
6. ¿Cuál es el precio de contado de un juego de muebles de sala forrados de cuero y una mesa de centro de guayacán si éstos se adquieren con 24 cuotas bimestrales de \$ 220? El primer pago se realiza 3 bimestres después de la negociación y se considera un interés del 18% anual compuesto bimestralmente.

R/. \$ 3511,94



7. María Beatriz solicita al Seguro Social un préstamo hipotecario de \$ 400000 para comprar una vivienda de lujo en un sector residencial. El préstamo debe cancelarse en pagos mensuales que se debitarán del sueldo de María Beatriz durante 24 años. El primer débito se realizará 3 bimestres después de recibir el préstamo y se considerará un interés del 12% nominal mensual. Determine:
- El valor de los débitos.
 - ¿Cuánto paga María Beatriz por intereses?

R/. a) \$ 4502,47; b) \$ 896711,36



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Qué caracteriza a las Anualidades Diferidas?
2. En la fórmula para calcular el Valor Presente de una Anualidad Diferida, asegúrese de entender el significado de cada uno de los parámetros.
3. Deduzca la fórmula para encontrar el Valor Presente de una Anualidad Diferida.
4. ¿Cómo calcularía el Valor Futuro de una Anualidad Diferida?
5. ¿Con qué fórmula calcularía los pagos o rentas en una Anualidad Diferida?
6. De la fórmula de Valor Presente para una Anualidad diferida (se recuerda a continuación), despeje la variable k

$$P = A \underbrace{\left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]}_{p'} [1+i]^{-k}$$

Objetivos:

- Definir claramente lo que son las Perpetuidades e ilustrar con varios ejemplos casos de la vida real donde éstas ocurren.
- Presentar los distintos tipos de Perpetuidades.
- Deducir y presentar las fórmulas respectivas.
- Ilustrar con ejemplos claros y prácticos a las Perpetuidades

8.1 Definición de Perpetuidad

Se conocen también como *Rentas Perpetuas*. Es un tipo de anualidad en las cuales las rentas o los pagos se realizan de indefinidamente (de por vida). Esto supone que el capital que la produce no debe agotarse.

Este tipo de anualidad ocurre por ejemplo en los siguientes casos:

- Un multimillonario fallece y en su testamento deja estipulado que una Fundación o Institución sin fines de lucro (asilo de ancianos, orfanatos, etc) recibirá una pensión indefinida como estímulo por su labor.
- Algunos proyectos de obras públicas que generan reposiciones periódicas como: puentes, represas, sistemas de irrigación, etc
- La administración de Universidades públicas
- Los dividendos sobre acciones, entre otros.

Las rentas o los pagos perpetuos generalmente son: mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc. Aunque el esquema es el mismo si existieran casos en que fueran diarios o semanales.

8.2 Tipos de Perpetuidades

Existen distintos tipos de Perpetuidades, entre ellas se pueden citar:

- Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas
- Rentas Perpetuas Anticipadas
- Rentas Perpetuas Diferidas
- Rentas Perpetuas que ocurren cada cierto número de Períodos de Capitalización

Se explicará en detalle cada uno estos tipos de Rentas Perpetuas a continuación.

8.2.1 Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas

En las *Rentas Perpetuas Ordinarias o Vencidas*, las rentas o los pagos se realizan de por vida y al final de cada período. Véase Figura 8.1.

Nótese que las rentas o los pagos generalmente son: mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc. Aunque podrían ser también: diarios, semanales o quincenales.

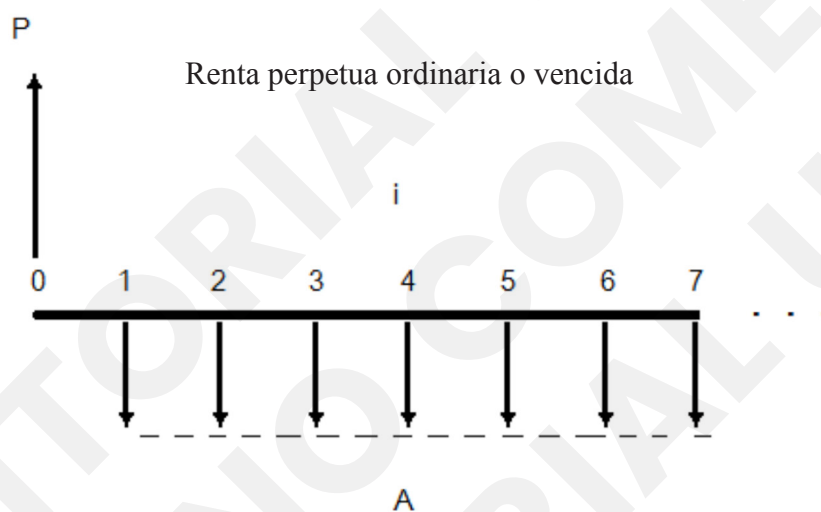


Figura 8.1

8.2.1.1 Dedución de la fórmula de Valor Presente para una Renta Perpetua Ordinaria

Para la presente deducción considere la Figura 8.1.

En el Capítulo 5 se presentó la fórmula de Valor Presente para una Anualidad Ordinaria o Vencida, ésta es:

$$P = A \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] \quad (5.1)$$

La ecuación 5.1 se la puede reescribir así:

$$P = A \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

Como en una Perpetuidad los pagos o las rentas son por tiempo ilimitado, n tendería a infinito, esto es: $n \rightarrow \infty$. Por tanto:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} A \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

$$P = A \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

Si $n \rightarrow \infty$, la expresión $\frac{1}{(1+i)^n} \rightarrow 0$, por tanto:

$$P = A * \frac{1}{i}$$

$$P = \frac{A}{i} \quad (8.1)$$

8.2.1.2 Valor Futuro de una Renta Perpetua Ordinaria

En vista de que los pagos o las rentas de una Perpetuidad se realizan por tiempo ilimitado, no se puede calcular el Valor Futuro.

Ejercicio resuelto 8.1

Una Institución de Beneficencia organiza y vende una rifa a nivel nacional con el fin de instituir una beca semestral indefinida de \$5000 para estudiantes de pregrado. ¿Qué cantidad de dinero debe recaudar con las ventas para invertirla a una tasa de interés del 12% anual convertible semestral para dicho efecto?

Se ilustra el enunciado con un DFC. (Véase Figura 8.2).

$$i = 12\% \text{ anual convertible semestral}$$

$$i = \frac{12\%}{2} \text{ semestral} = 6\% \text{ semestral}$$

Luego se usa la fórmula 8.1:

$$P = \frac{A}{i}$$

$$P = \frac{5000}{0,06} = \$83333,3$$

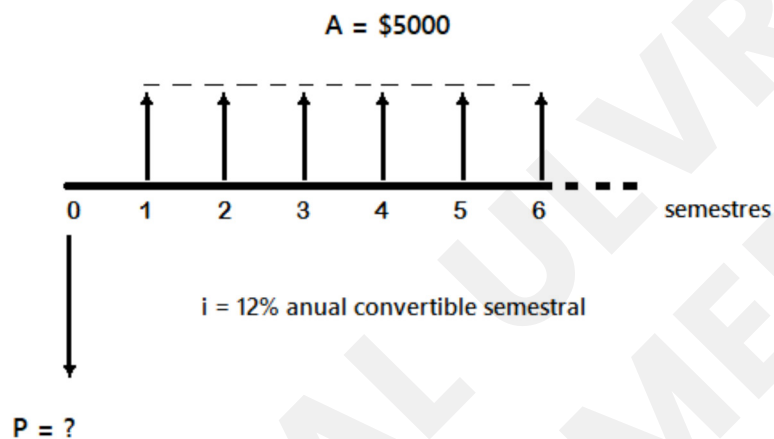


Figura 8.2

Ejercicio resuelto 8.2

Suponga que \$25000 son depositados en una cuenta que devenga un interés del 12% nominal quincenal. ¿Qué cantidad máxima de dinero se puede retirar al final de cada año de manera indefinida si se realiza dicho depósito?

Se ilustra el enunciado con un DFC. (Véase Figura 8.3)

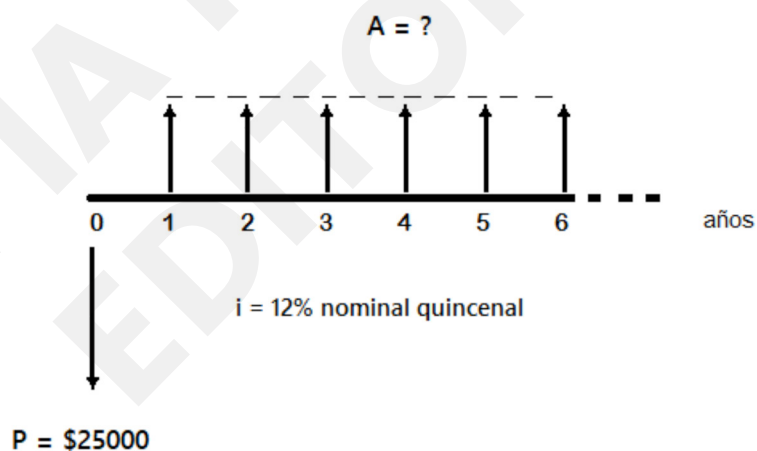


Figura 8.3

En vista de que los períodos de capitalización son anuales y la tasa de interés es nominal quincenal, se debe transformar la tasa de interés dada a una tasa efectiva anual. Para el efecto se utiliza la fórmula 3.7:

$$\%e = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 p} \right)^p - 1 \right] * 100$$

$$\%e = \left[\left(1 + \frac{12}{100 * 24} \right)^{24} - 1 \right] * 100$$

$$\%e = 12,7159 \% \text{ efectivo anual}$$

Luego se usa la fórmula 8.1, de la cual se despeja A como sigue:

$$P = \frac{A}{i}$$

$$A = P i$$

$$A = 25000 * 0,127159 = \$ 3178,97$$

Ejercicio resuelto 8.3

¿Qué cantidad de dinero pueden retirar mensual e indefinidamente una viuda y sus hijos si hoy les son depositados \$1'750000 en una Institución Financiera que paga una tasa de interés nominal mensual del 8,5%?

Se ilustra el enunciado con un DFC. (Véase Figura 8.4).

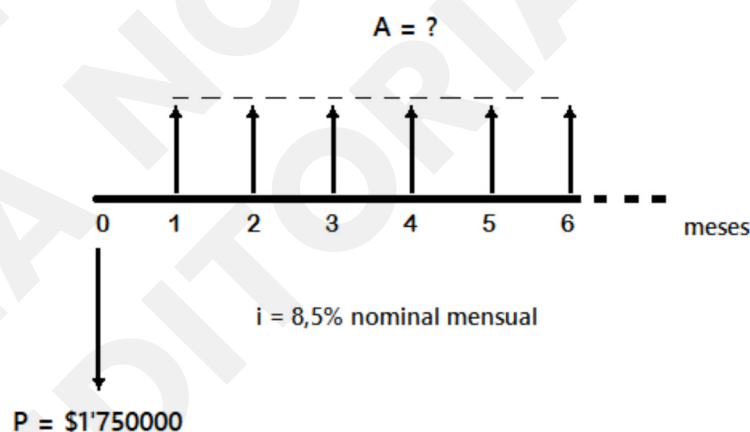


Figura 8.4

$i = 8,5\%$ nominal mensual

$$i = \frac{8,5\%}{12} \text{ mensual} = 0,708\bar{3} \% \text{ mensual}$$

Luego se usa la fórmula 8.1, de la cual se despeja A como sigue:

$$P = \frac{A}{i}$$

$$A = P i$$

$$A = 1'750000 * 0,00708\bar{3} = \$ 12395,8\bar{3}$$

Ejercicio resuelto 8.4

Un multimillonario invirtió \$2'000000 para que le produzcan los suficientes intereses y poder disponer de \$500 quincenales por tiempo ilimitado. ¿A qué tasa de interés nominal quincenal se realizó la inversión?

Se ilustra el enunciado con un DFC. (Véase Figura 8.5).

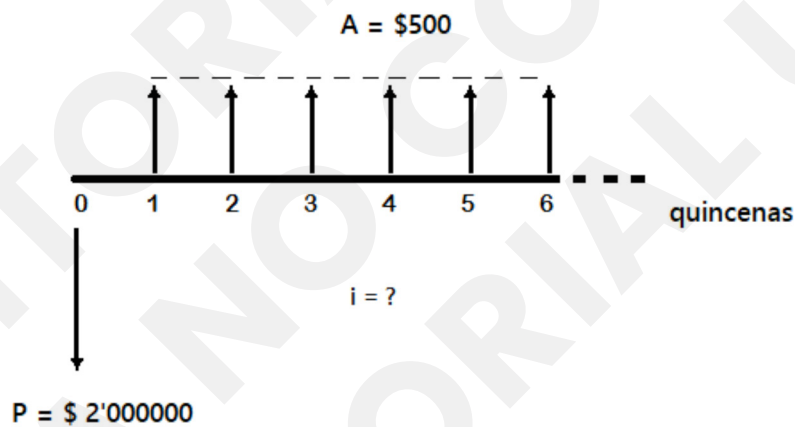


Figura 8.5

Se utiliza la fórmula 8.1, de la cual se despeja i como sigue:

$$P = \frac{A}{i}$$

$$i = \frac{A}{P}$$

$$i = \frac{500}{2'000000} = 0,00025 \text{ quincenal}$$

Como se ha advertido a lo largo de un gran número de ejercicios en este libro:

$$i = \frac{i'}{p}$$

$$i' = i p$$

$$i' = 0,00025 * 24 = 0,006 \text{ nominal quincenal}$$

$$i' = 0,6\% \text{ nominal quincenal}$$

8.2.2 Rentas Perpetuas Anticipadas

En las *Rentas Perpetuas Anticipadas*, las rentas o los pagos se realizan de por vida y al inicio de cada período. Véase Figura 8.6.

Nótese que las rentas o los pagos generalmente son: mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc. Aunque podrían ser también: diarios, semanales o quincenales.

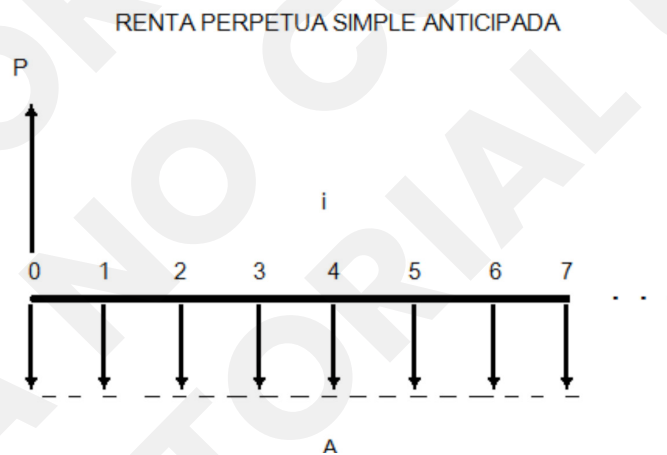


Figura 8.6

8.2.2.1 Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Renta Perpetua Anticipada

Para la presente deducción considera la Figura 8.7

En la sección anterior se presentó la fórmula para el Valor Presente de una Renta Perpetua Ordinaria, fórmula 8.1, esta es:

$$P = \frac{A}{i} \quad (8.1)$$

Comparando los 2 DFCs de la Figura 8.7, se podría reescribir la fórmula 8.1 correspondiente al Valor Presente para una Renta Perpetua Ordinaria al Valor Presente para una Renta Perpetua Anticipada de la siguiente manera:

$$P - A = \frac{A}{i}$$

$$P = A + \frac{A}{i} \quad (8.2)$$

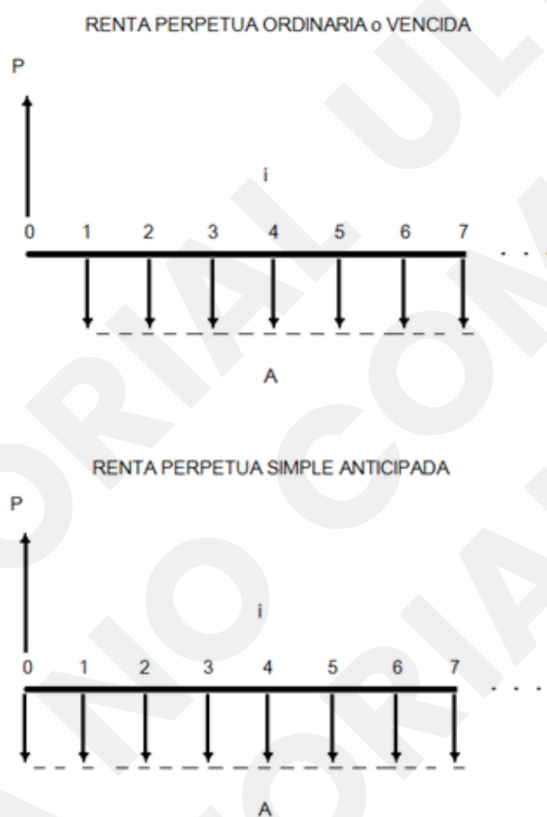


Figura 8.7

8.2.3 Rentas Perpetuas Diferidas

Son aquellas Perpetuidades en las cuales la primera renta o el primer pago se realiza después de transcurrido un cierto número de periodos. Véase Figura 8.8.

Nótese que las rentas o los pagos generalmente son: mensuales, trimestrales, semestrales, anuales, etc. Aunque podrían ser también: diarios, semanales o quincenales.

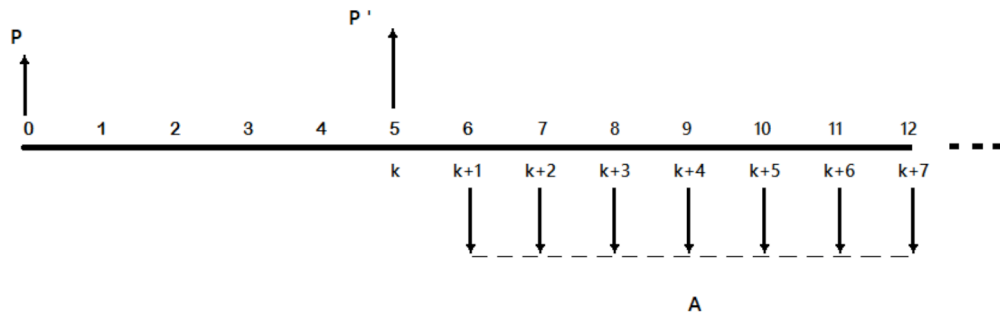


Figura 8.8

8.2.3.1 Deducción de la fórmula de Valor Presente para una Renta Perpetua Diferida

En la figura 8.8, sean:

k intervalo de aplazamiento

$k = 5$, como se indica en la Figura 8.8, los pagos comienzan a hacerse 5 períodos después.

P' representa el Valor Presente de la Perpetuidad Diferida. Se ubica un período antes del inicio de la misma. Véase Figura 8.8.

P representa el Valor Presente a la fecha de hoy de la Perpetuidad Diferida o el Valor Presente del “Valor Futuro” P' . Véase Figura 8.8.

Observando nuevamente la Figura 8.8, podría escribirse la siguiente ecuación:

$$P = P' (P/F, i\%, k)$$

Pero P' representa el Valor Presente de una Perpetuidad por tanto:

$$P = \frac{A}{i} (P/F, i\%, k)$$

Remplazando el factor de interés compuesto por su fórmula respectiva:

$$P = \frac{A}{i} (1 + i)^{-k} \quad (8.3)$$

Ejercicio resuelto 8.5

¿Qué cantidad de dinero debe depositar hoy en una cuenta Manuel González para poder retirar \$1200 mensuales por tiempo ilimitado comenzando dentro de $1 \frac{1}{2}$ año, si se supone que la tasa de interés permanece invariable e igual a 8% efectivo anual?

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 8.9.

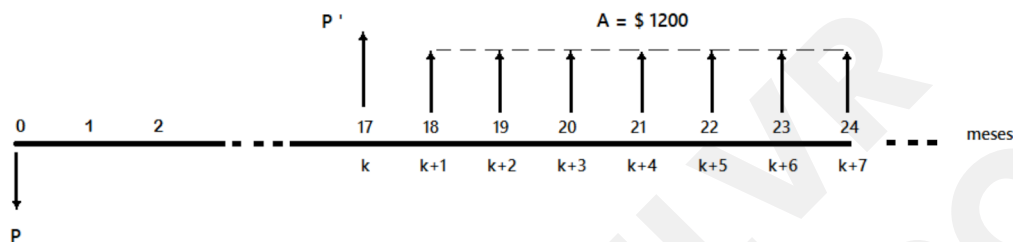


Figura 8.9

La tasa de interés dada es del 8% efectiva anual, sin embargo los retiros son mensuales; por tanto, se requiere transformar la tasa efectiva anual a una tasa anual compuesta mensual. Para este propósito utilizamos la fórmula 3.7 de la siguiente manera:

$$\%e = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 p} \right)^p - 1 \right] * 100$$

$$8 = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 * 12} \right)^{12} - 1 \right] * 100$$

$$0,08 = \left(1 + \frac{\%n}{100 * 12} \right)^{12} - 1$$

$$1,08 = \left(1 + \frac{\%n}{100 * 12} \right)^{12}$$

$$1,08 = \left(1 + \frac{\%n}{1200} \right)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1,08} = \sqrt[12]{\left(1 + \frac{\%n}{1200} \right)^{12}}$$

$$\sqrt[12]{1,08} = 1 + \frac{\%n}{1200}$$

$$\%n = 1200 * \left(\sqrt[12]{1,08} - 1 \right)$$

$\%n = 7,72\%$ anual compuesta mensual

$\%n = 0,64\bar{3}\%$ mensual

Ahora se utiliza la fórmula 8.3:

$$P = \frac{A}{i} (1 + i)^{-k} \quad (8.3)$$

$$P = \frac{1200}{0,0064\bar{3}} (1 + 0,0064\bar{3})^{-17}$$

$$P = \$ 167263,04$$

Ejercicio resuelto 8.6

Todos los miembros de la Asociación de Entrenadores de Voleibol del Ecuador invierten en un plan para jubilados. Sus aportes suman \$ 6'600000 en conjunto y son invertidos en una Institución que promete pagarles un interés del 12% nominal trimestral. ¿Cuál será la renta trimestral de la cual podrán gozar luego de 2 años de manera indefinida?

El enunciado se ilustra en la Figura 8.10.

$i = 12\%$ nominal trimestral

$$i = \frac{12\%}{4} \text{ trimestral} = 3\% \text{ trimestral}$$

Se utiliza la fórmula 8.3:

$$P = \frac{A}{i} (1 + i)^{-k} \quad (8.3)$$

$$6'600000 = \frac{A}{0,03} (1 + 0,03)^{-7}$$

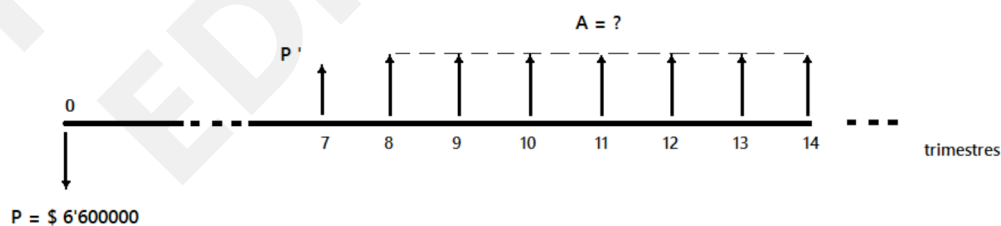


Figura 8.10

$$6'600000 = \frac{A}{0,03} * 1,03^{-7}$$

$$A = \frac{6'600000 * 0,03}{1,03^{-7}} = \$ 243515,03$$

Todo el grupo recibirá \$ 243515,03 trimestralmente; cantidad que deberá dividirse para el número de miembros de la Asociación para conocer la renta trimestral individual.

Ejercicio resuelto 8.7

¿Cuánto tiempo antes de poder retirar \$1500 quincenalmente de por vida deben depositarse \$350000 en una Institución Financiera que reconoce un interés del 9,6% nominal quincenal, si se supone que la tasa de interés permanece invariable?

El enunciado se ilustra en la Figura 8.11.

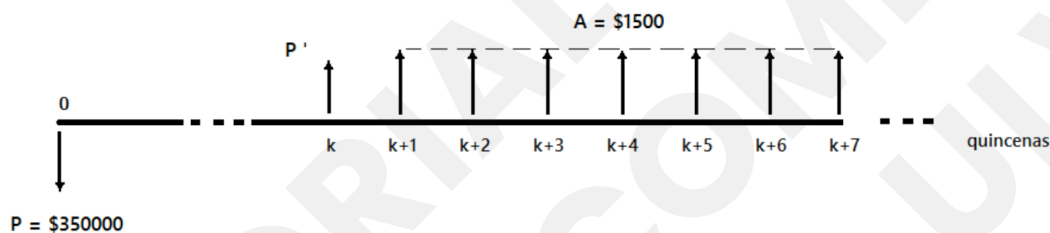


Figura 8.11

$i = 9,6\%$ nominal quincenal

$$i = \frac{9,6\%}{24} \text{ quincenal} = 0,4\% \text{ quincenal}$$

Se calcula el capital necesario una quincena antes de la primera renta:

$$P' = \frac{A}{i}$$

$$P' = \frac{1500}{0,004} = 375000$$

Como P' se lo puede considerar un Valor Futuro con respecto a P , se utiliza la fórmula 3.1:

$$F = P (1 + i)^n$$

De acuerdo a la Figura 8.10:

$$P' = P (1 + i)^n$$

$$375000 = 350000 (1 + 0,004)^n$$

$$375000 = 350000 * 1,004^n$$

$$1,071428571 = 1,004^n$$

$$n = \log_{1,004} 1,071428571$$

$$n \approx 17 \text{ quincenas}$$

17 quincenas antes de retirar la primera renta deberían depositarse \$350000 en una Institución Financiera para que se den las condiciones indicadas.

8.2.4 Rentas Perpetuas que ocurren cada cierto número de períodos de capitalización

8.2.4.1 Deducción del Valor Presente de una Renta Perpetua que ocurre cada cierto número de períodos de capitalización

Para la presente deducción tenga presente la Figura 8.12.

Como se puede observar en la Figura 8.12, el valor R de cada pago es un Valor Futuro de k pagos, cada uno de un valor A. Dichos pagos son realizados al final de cada período de capitalización. Entonces, se puede aplicar la fórmula 5.3 de la siguiente manera:

$$F = A (F/A, i\%, n)$$

Reemplazando los datos según el gráfico:

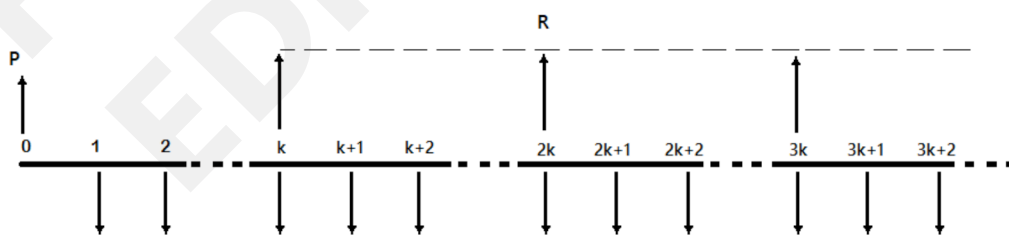


Figura 8.12

$$R = A (F/A, i\%, k) \quad \therefore \quad A = R / (F/A, i\%, k) = R (A/F, i\%, k) \quad (1)$$

En el presente capítulo se dedujo la fórmula 8.1, esta es:

$$P = \frac{A}{i} \quad (8.1)$$

Remplazando (1) en (8.1), se tendría:

$$P = \frac{R}{i} (A/F, i\%, k) \quad (8.4)$$

8.3 Costo capitalizado

En la vida real, existen ciertos activos que requieren ser reemplazados cada cierto número de períodos (por ejemplo equipos tecnológicos) o proyectos que precisan cierto mantenimiento cada cierto número de períodos (por ejemplo un puente metálico requiere pintarse cada 2 o 3 años aproximadamente). Se requiere encontrar un costo que sume el costo inicial con los costos de renovaciones o mantenimientos a perpetuidad. Este costo se conoce como *Costo capitalizado* (“*Valor Presente*” del activo o del proyecto).

El Costo capitalizado puede ser útil para elegir la alternativa más económica entre 2 o más que se presenten.

8.3.1 Método para calcular el Costo Capitalizado

Los pasos que se sugieren para calcular el Costo capitalizado son:

1. Dibujar un DFC que muestre todos los ingresos o costos *NO recurrentes* (que ocurren una sola vez) y *recurrentes* (periódicos).
2. Calcular el Valor Presente de todos los ingresos o costos *NO recurrentes*.
3. Se convierten los ingresos o costos recurrentes que ocurren cada k períodos a un Valor Presente.
4. Las Anualidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.
5. Las Perpetuidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.
6. Las Perpetuidades Diferidas se llevan a Valor Presente.
7. Se suman los Valores Presentes obtenidos en los pasos anteriores

Ejercicio resuelto 8.8

Suponga un proyecto de Construcción civil que tiene un costo inicial de \$200000 y un costo adicional de \$30000 luego de 5 años.

Los costos anuales para su operación son de \$5000 durante los primeros 4 años y de \$10000 a posteriori. Adicionalmente existe un costo recurrente de \$8000 cada 10 años.

Asumiendo que la tasa de interés es del 10% anual compuesta, calcule el Costo capitalizado del proyecto.

Siguiendo los pasos de la metodología propuesta en esta sección:

1. Se dibuja el DFC que muestra todos los ingresos o costos NO recurrentes y recurrentes. Véase Figura 8.13.

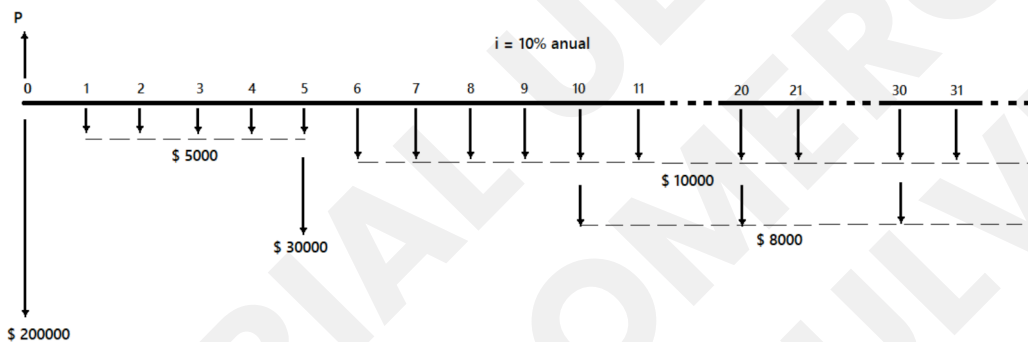


Figura 8.13

2. Se calcula el Valor Presente de todos los ingresos o costos NO recurrentes.

$$P_1 = 200000 + 30000 (P/F, 10\%, 5)$$

$$P_1 = 200000 + 30000 * 0,6209$$

$$P_1 = \$ 218627$$

3. Se convierten los ingresos o costos recurrentes que ocurren cada k períodos a un Valor Presente.

En este caso existe un costo recurrente de \$8000 cada 10 años.

$$P = \frac{R}{i} (A/F, i\%, k) \quad (8.4)$$

$$P_2 = \frac{8000}{0.1} (A/F, 10\%, 10)$$

$$P_2 = \frac{8000}{0.1} * 0,06275 = \$ 5020$$

4. Las Anualidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.

Existe una Anualidad Ordinaria de \$5000 durante los 5 primeros años.

$$P_3 = 5000 (P/A, 10\%, 5)$$

$$P_3 = 5000 * 3,7908 = \$ 18954$$

5. Las Perpetuidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.

En este caso no existen

6. Las Perpetuidades Diferidas se llevan a Valor Presente.

$$P = \frac{A}{i} (1 + i)^{-k} \quad (8.3)$$

$$P_4 = \frac{10000}{0,1} (1 + 0,1)^{-5} = \$ 62092,13$$

7. Se suman los Valores Presentes obtenidos en los pasos anteriores

$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$P_T = 218627 + 5020 + 18954 + 62092,13$$

$$P_T = \$ 304693,1$$

Ejercicio resuelto 8.9

Se tienen 2 proyectos cuyos costos se presentan a continuación:

Proyecto A

Costo inicial	\$20'000000	
Costos de inspección y mantenimiento	\$20000	cada año
Costo de mantenimiento	\$40000	cada 10 años
Costos de los derechos	\$500000	

Proyecto B

Costo inicial	\$15'000000	
Costo operativo	\$5000	cada año
Costo de mantenimiento	\$15000	cada 3 años
Costos de los derechos	\$10'000000	

Compare las 2 alternativas calculando el Costo capitalizado y elija la más económica. Asuma que la tasa de interés es del 5%.

Se analiza cada proyecto independientemente y luego se comparan los resultados.

Proyecto A

1. Se dibuja el DFC que muestra todos los ingresos o costos NO recurrentes y recurrentes. Véase Figura 8.14.

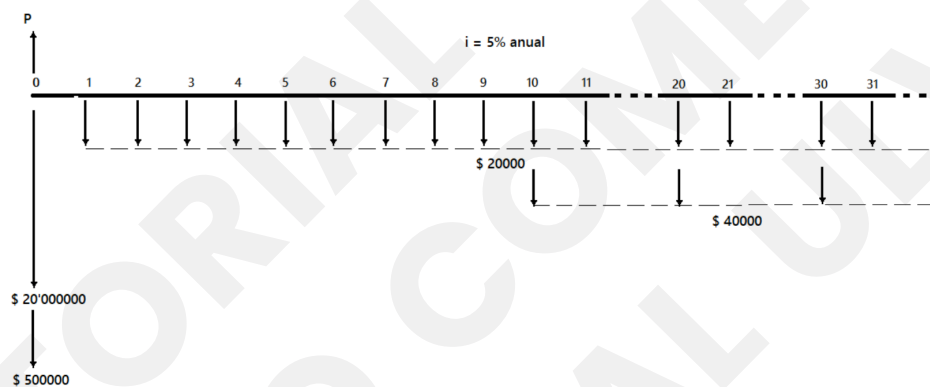


Figura 8.14

2. Se calcula el Valor Presente de todos los ingresos o costos NO recurrentes.

$$P_1 = 20'000000 + 500000$$

$$P_1 = \$ 20'500000$$

3. Se convierten los ingresos o costos recurrentes que ocurren cada k períodos a un Valor Presente.

En este caso existe un costo recurrente de \$40000 cada 10 años.

$$P = \frac{R}{i} (A/F, i\%, k) \quad (8.4)$$

$$P_2 = \frac{40000}{0.05} (A/F, 5\%, 10)$$

$$P_2 = \frac{40000}{0.05} * 0,07950 = \$ 63600$$

- Las Anualidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.

En este caso no existen.

- Las Perpetuidades Ordinarias se llevan a Valor Presente.

Existe una Perpetuidad Ordinaria de \$20000.

$$P = \frac{A}{i} \quad (8.1)$$

$$P_3 = \frac{20000}{0,05}$$

$$P_3 = \$ 400000$$

- Las Perpetuidades Diferidas se llevan a Valor Presente.

En este caso no existen.

- Se suman los Valores Presentes obtenidos en los pasos anteriores

$$P_A = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P_A = 20'500000 + 63600 + 400000$$

$$P_A = \$ 20'963600$$

Proyecto B

- Se dibuja el DFC que muestra todos los ingresos o costos NO recurrentes y recurrentes. Véase Figura 8.15.

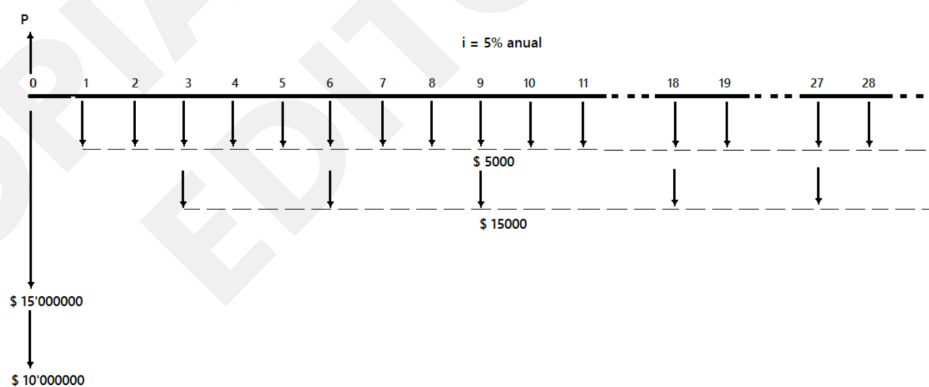


Figura 8.15

2. Se calcula el Valor Presente de todos los ingresos o costos NO recurrentes.

$$P_1 = 15'000000 + 10'000000$$

$$P_1 = \$ 25'000000$$

3. Se convierten los ingresos o costos recurrentes que ocurren cada k períodos a un Valor Presente.

En este caso existe un costo recurrente de \$15000 cada 3 años.

$$P = \frac{R}{i} (A/F, i\%, k) \quad (8.4)$$

$$P_2 = \frac{15000}{0.05} (A/F, 5\%, 3)$$

$$P_2 = \frac{15000}{0.05} * 0,31721 = \$ 95163$$

4. Las Anualidades Ordinarias se convierten en un Valor Presente.

En este caso no existen.

5. Las Perpetuidades Ordinarias se llevan a Valor Presente.

Existe una Perpetuidad Ordinaria de \$20000.

$$P = \frac{A}{i} \quad (8.1)$$

$$P_3 = \frac{5000}{0,05}$$

$$P_3 = \$ 100000$$

6. Las Perpetuidades Diferidas se llevan a Valor Presente.

En este caso no existen.

7. Se suman los Valores Presentes obtenidos en los pasos anteriores

$$P_B = P_1 + P_2 + P_3$$

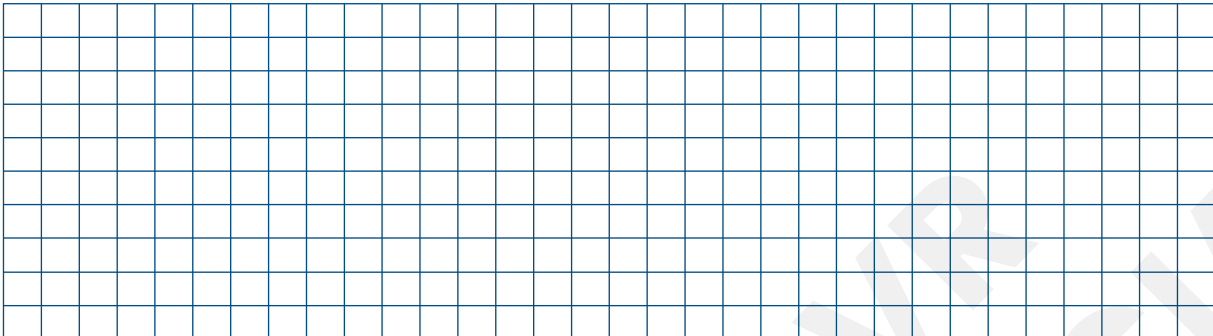
$$P_B = 25'000000 + 95163 + 100000$$

$$P_B = \$ 25'195163$$

Como $P_A < P_B$, se debe elegir el Proyecto A.

7. ¿Cuánto tiempo antes de poder retirar \$6000 semestralmente de por vida deben depositarse \$51400 en una Institución Financiera que reconoce un interés del 18% nominal semestral, si se supone que la tasa de interés permanece invariable?

R/. 1 ½ año.

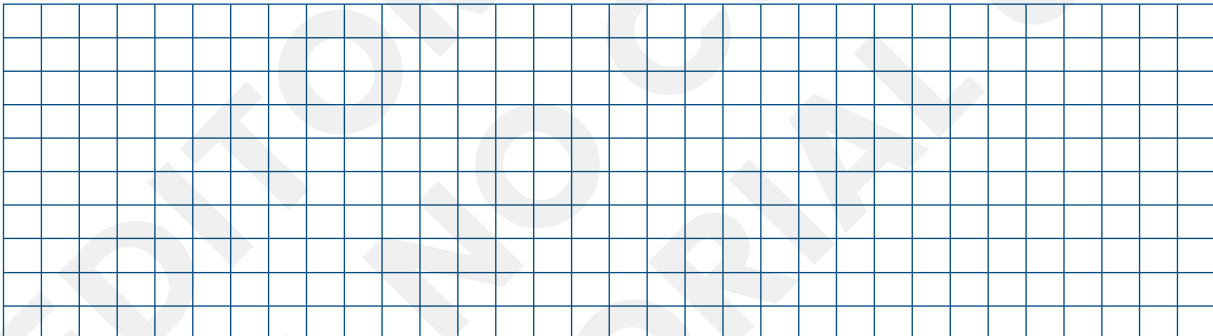


8. Suponga una obra de Ingeniería que tiene un costo inicial de \$500000 y un costo adicional de \$15000 luego de 5 años.

Los costos anuales para su operación son de \$5000 durante los primeros 4 años y de \$15000 a posteriori. Adicionalmente existe un costo recurrente de \$3000 cada 10 años.

Asumiendo que la tasa de interés es del 10% anual compuesta, calcule el Costo capitalizado del proyecto.

R/. \$629497,8



9. Se tienen 2 proyectos cuyos costos se presentan a continuación:

Proyecto A

Costo inicial	\$20'000000	
Costos de inspección y mantenimiento	\$20000	cada año
Costo de mantenimiento	\$40000	cada 10 años
Costos de los derechos	\$500000	

Proyecto B

Costo inicial	\$15'000000	
Costo operativo	\$5000	cada año
Costo de mantenimiento	\$15000	cada 3 años
Costos de los derechos	\$5'600000	

Compare las 2 alternativas calculando el Costo capitalizado y elija la más económica. Asuma que la tasa de interés es del 5%.

R/. $P_A = \$20'963600$ y $P_B = \$20'795163$. Como $P_B < P_A$, debe elegirse el proyecto B

Preguntas de Autoevaluación

1. Defina con sus propias palabras lo que entiende por Rentas Perpetuas.
2. De 2 ejemplos distintos a los dados anteriormente de “transacciones” que en la vida real se comporten como Perpetuidades.
3. Mencione y explique los distintos tipos de Perpetuidades.
4. Deduzca la fórmula del Valor Presente para una Perpetuidad Ordinaria
5. ¿En qué consisten las Rentas Perpetuas Anticipadas?. Ilustre su definición con un DFC.
6. Deduzca el Valor Presente para una Renta Perpetua Anticipada.
7. ¿En qué consisten las Rentas Perpetuas Diferidas? Ilustre su definición con un DFC.
8. En la fórmula 8.3, ¿qué representa el parámetro k ?
9. De 2 ejemplos de la vida real donde suceden Perpetuidades que ocurren cada cierto número de periodos de capitalización.
10. Explique con sus propias palabras lo que es el Costo capitalizado.
11. ¿Qué utilidad tiene calcular el Costo capitalizado de un Proyecto?

Objetivos:

- Definir lo que es un Gradiente en términos generales.
- Dar varios ejemplos que se modelen con Gradientes.
- Presentar una clasificación clara de los distintos tipos de Gradientes.
- Deducir las fórmulas para encontrar el Valor Presente de los distintos tipos de Gradientes.
- Resolver ejercicios combinados de los distintos tipos de Gradientes con Anualidades.

9.1 Definición general

Un gradiente se caracteriza por:

- Estar constituido por un conjunto de flujos de efectivo que *aumentan o disminuyen de manera uniforme*.
- El flujo de caja (pago o renta) cambia en la misma cantidad cada período y a dicha cantidad se conoce como Gradiente.

Ejemplos:

- Si un fabricante de camiones calcula que el costo de mantener las máquinas de manufactura aumentará en \$1000 anuales, el gradiente es \$1000.
- Si una empresa estima que el ingreso disminuirá en \$2000 anualmente durante los próximos 7 años; este ingreso decreciente representa un gradiente negativo por \$2000 anuales.
- Si usted compra un auto nuevo con la garantía correspondiente por 15 mil Km es seguro que el primer año tendrá que gastar sólo en gasolina, pero luego los costos por mantenimiento seguramente aumentarán gradualmente.

Conviene asumir que el flujo de efectivo (pago o renta) que ocurre al final del primer año no se involucra en el gradiente sino que es un **Pago Base**, pues en la práctica el Pago Base es generalmente más grande o más pequeño que el Gradiente que aumenta o disminuye.

Para determinar un gradiente se puede aplicar la fórmula 9.1 que se especifica a continuación:

$$\text{Gradiente} = \frac{\text{Aumento o disminución en los próximos } n \text{ años}}{n - 1} \quad (9.1)$$

La teoría expuesta anteriormente se ilustra en la Figura 9.1

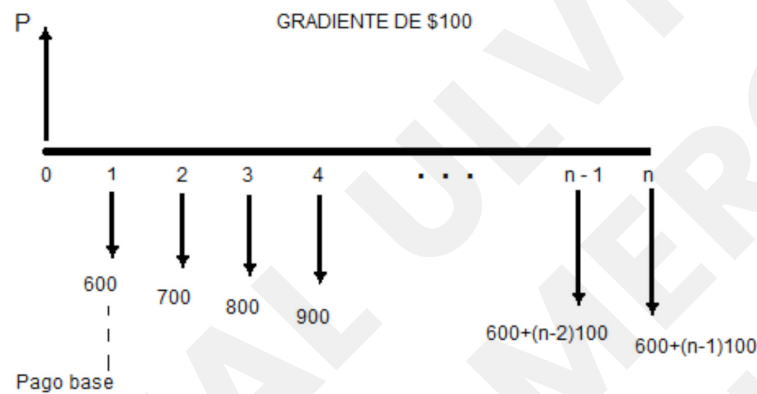


Figura 9.1

Si se ignora el Pago Base, podría considerarse la Figura 9.2.

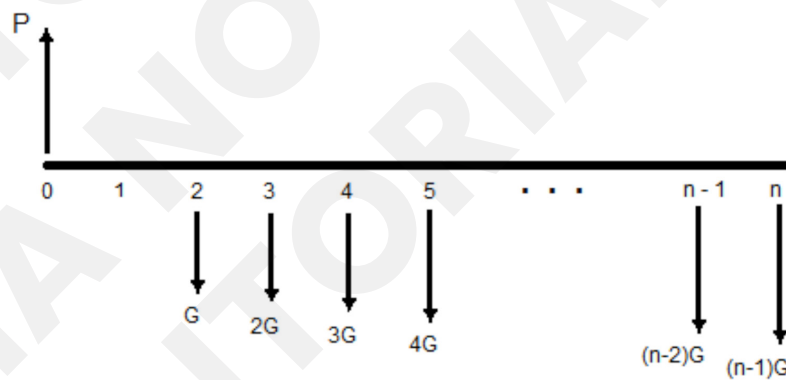


Figura 9.2

Como se explicará luego, hay varios tipos de gradientes. Otros ejemplos de Gradientes se muestran en la Figura 9.3.

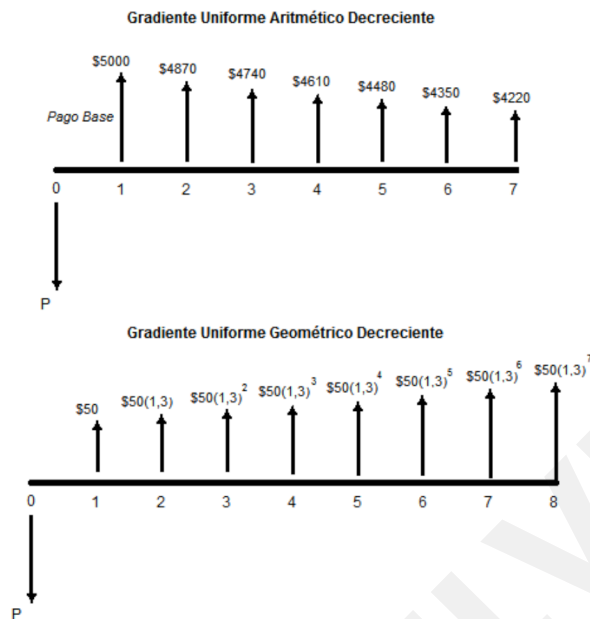


Figura 9.3

Ejercicio resuelto 9.1

Una firma precisa que puede obtener un ingreso de \$ 50000 en la venta de productos de consumo masivo el próximo año. Adicionalmente espera que las ventas aumenten gradualmente con la introducción de una nueva gama de productos hasta \$ 155000 en los próximos 8 años. Determine el gradiente y elabore el DFC.

Recordemos la fórmula para calcular un gradiente:

$$\text{Gradiente} = \frac{\text{Aumento o disminución en los próximos } n \text{ años}}{n - 1} \quad (9.1)$$

$$\text{Gradiente} = \frac{\$155000 - \$50000}{8 - 1} = \$15000$$

El DFC solicitado se ilustra en la Figura 9.4

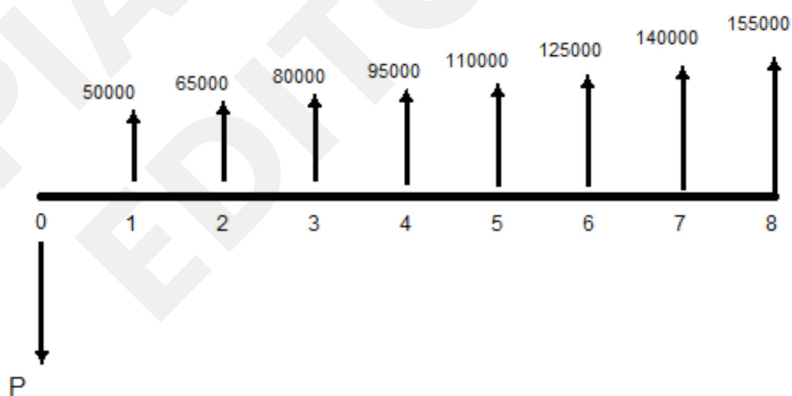


Figura 9.4

9.2 Tipos de Gradientes

Los gradientes se pueden clasificar considerando:

- Si el Flujo aumenta o disminuye, los gradientes pueden ser:
 - Gradientes Crecientes
 - Gradientes Decrecientes.
- El momento en el que inician:
 - Gradientes Convencionales. Empiezan en el año 2.
 - Gradientes Diferidos. Inician luego de un período de gracia o se aplazan por un tiempo.
- La forma como aumentan o disminuyen:
 - Aritméticos, si aumentan o disminuyen según una cantidad aritméticamente.
 - Geométricos, si aumentan o disminuyen según un factor.

9.3 Gradientes Aritméticos

En los Gradientes Aritméticos, las cantidades de dinero colocadas en los Flujos de Efectivo forman una Progresión Aritmética. Es decir las cantidades podrían ser $G, 2G, 3G, \dots, (n-1)G$. Esta secuencia de cantidades si se las considera una Progresión Aritmética, tendría por razón G . Recordemos que en una Progresión Aritmética (Apéndice A) la razón se obtiene restando un término cualquiera (que no sea el primero) menos el inmediato anterior.

Ver Figura 9.2.

9.3.1 Deducción de la fórmula de Valor Presente para un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional.

Para la presente deducción, tenga presente la Figura 9.3.

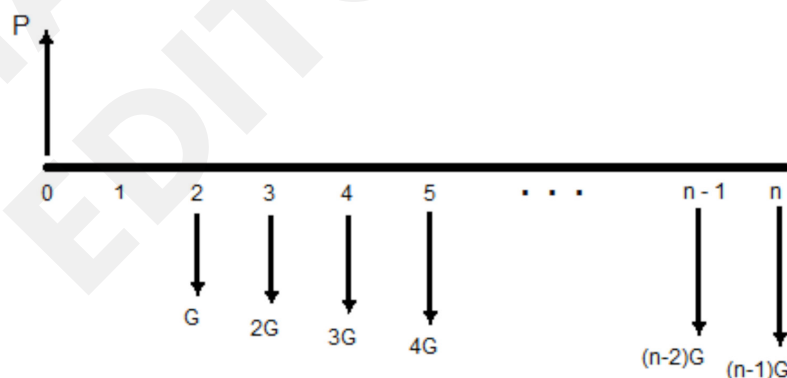


Figura 9.2

Considere que en dicha figura, se ignora el Pago Base y el Gradiente inicia en el año 2.

Obtenemos el Valor Presente del DFC mostrado en la Figura 9.2 y para esto llevamos a Valor Presente de cada uno de los Flujos a partir del año 2 hasta el año n, como sigue:

$$P = F_2(P/F, i\%, 2) + F_3(P/F, i\%, 3) + F_4(P/F, i\%, 4) + \dots + F_{n-1}(P/F, i\%, n-1) + F_n(P/F, i\%, n)$$

Reemplazando F_2, F_3, \dots, F_n por $G, 2G, (n-1)G$:

$$P = G(P/F, i\%, 2) + 2G(P/F, i\%, 3) + 3G(P/F, i\%, 4) + \dots + (n-2)G(P/F, i\%, n-1) + (n-1)G(P/F, i\%, n)$$

Sacando factor común G :

$$P = G[1(P/F, i\%, 2) + 2(P/F, i\%, 3) + 3(P/F, i\%, 4) + \dots + (n-2)(P/F, i\%, n-1) + (n-1)(P/F, i\%, n)]$$

Reemplazando cada factor por la fórmula correspondiente:

$$P = G \left[\frac{1}{(1+i)^2} + \frac{2}{(1+i)^3} + \frac{3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-1}} + \frac{n-1}{(1+i)^n} \right] \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(1+i)^1$:

$$P(1+i)^1 = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{n-2}{(1+i)^{n-2}} + \frac{n-1}{(1+i)^{n-1}} \right] \quad (2)$$

Restando (2) - (1):

$$P(1+i)^1 - P = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(2-1)}{(1+i)^2} + \frac{(3-2)}{(1+i)^3} + \dots + \frac{(n-1)-(n-2)}{(1+i)^{n-1}} - \frac{n-1}{(1+i)^n} \right]$$

$$P(1+i)^1 - P = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1-n}{(1+i)^n} \right]$$

$$Pi = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + \frac{G}{(1+i)^n} - \frac{Gn}{(1+i)^n}$$

Insertando el penúltimo término dentro de los corchetes:

$$Pi = G \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] - \frac{Gn}{(1+i)^n}$$

Dividiendo toda la expresión para i :

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^1} \right] - \frac{Gn}{i(1+i)^n} \quad (3)$$

La expresión entre corchetes es la Suma de una Progresión Geométrica finita (S_n), por lo que puede escribirse lo siguiente:

$$S_n = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Recordemos que la fórmula para calcular S_n viene dada por:

$$S_n = \frac{a_1(R^n - 1)}{R - 1}$$

Por tanto:

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right) \left[\frac{1}{(1+i)^n} - 1\right]}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{1+i}\right) \left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1 - 1 - i}{1+i}} = \frac{\left[\frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{-i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Remplazando el valor resultante de S_n en la ecuación (3):

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] - \frac{Gn}{i(1+i)^n}$$

Sacando factor común G:

$$P = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = G * \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \quad (9.2)$$

Haciendo una analogía con el uso de los Factores de Interés Compuesto se puede escribir:

$$P = G * (P/G, i\%, n)$$

La ecuación 9.2 permite calcular el Valor Presente de un Gradiente Aritmético Convencional (El Gradiente comienza en el período 2 y se ignora el Pago Base).

9.3.2 Anualidad de un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional

La Anualidad de un Gradiente Convencional puede representarse como se indica en la Figura 9.5. Nótese que el Gradiente al ser Convencional empieza en el período 2 y la Anualidad empieza en el período 1.

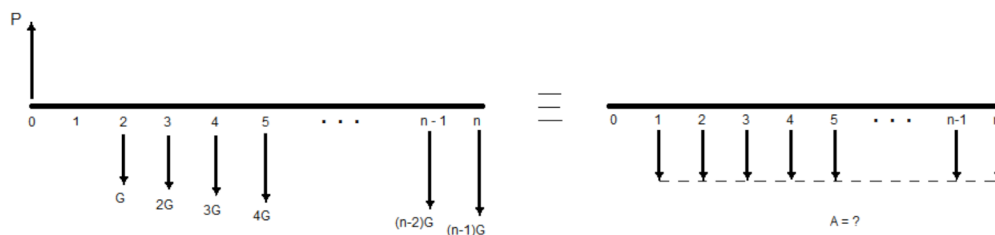


Figura 9.5

$$A = \frac{G (P/G, i\%, n)}{P} (A/P, i\%, n)$$

$$A = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (9.3)$$

$$A = G(A/G, i\%, n) \quad (9.4)$$

Demostración

$$A = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n} \right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = \frac{G}{i} \left[1 - \frac{ni}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

Al factor $\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$ se conoce como FACTOR DE SERIE ANUAL DE GRADIENTE UNIFORME.

9.3.3 Valor Futuro de un Gradiente Aritmético Uniforme Convencional

Si consideramos que conocemos G , $i\%$, n y con ellos el Valor Presente del Gradiente, podríamos escribir:

$$F = P (F/P, i\%, n)$$

$$F = \frac{G (P/G, i\%, n)}{P} (F/P, i\%, n)$$

$$F = G * \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right] (1+i)^n$$

$$F = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1 - ni}{i(1+i)^n} \right] (1+i)^n$$

$$F = \frac{G}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right] \quad (9.5)$$

$$F = G * \frac{1}{i} \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right]$$

$$F = G (F/G, i\%, n) \quad (9.6)$$

Ejercicio resuelto 9.2

Samuel Anderson ahorra dinero para comprar su auto de la siguiente manera. Depositará \$ 600 en su cuenta de ahorros el próximo año y estima que los depósitos aumentarán en \$ 50 cada año hasta luego de 10 años.

Calcule el Valor Presente de dicha inversión si la tasa de interés es del 7% anual.

El texto del enunciado se ilustra en la Figura 9.6.

$$P_T = P_A + P_G$$

$$P_T = A (P/A, 7\%, 10) + G (P/G, 7\%, 10)$$

$$P_T = 600 * 7,0236 + 50 * 27,7156$$

$$P_T = \$5599,94$$

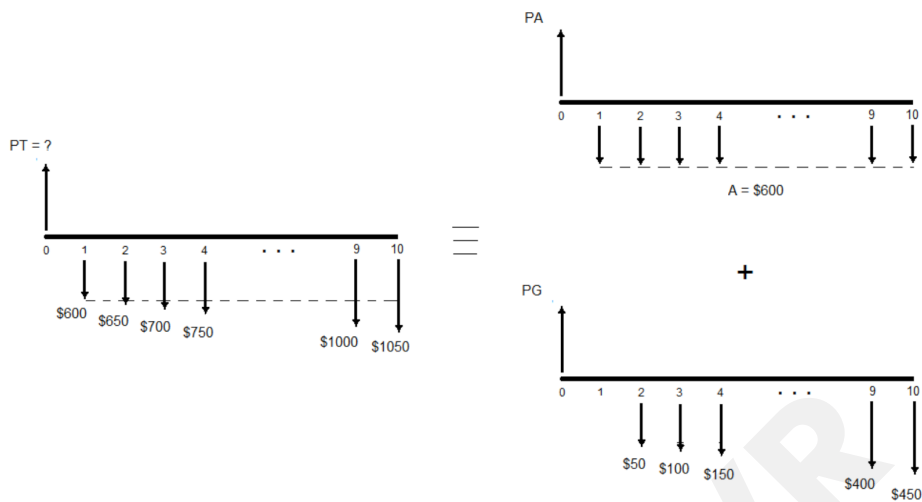


Figura 9.6

Ejercicio resuelto 9.3

Una empresa recibe un préstamo de \$20000 con una tasa de interés del 30% anual compuesta semestral. La deuda debe ser cancelada durante 7 semestres. Los pagos deberán ser cada uno mayor en \$100 que el anterior y el primer pago se hará un semestre después de que el préstamo sea pactado. Determinar el pago base y cuál sería el valor del pago en el último semestre.

$i = 30\%$ anual compuesta semestral

$i = 30\% / 2$ semestral

$i = 15\%$ semestral

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 9.7.

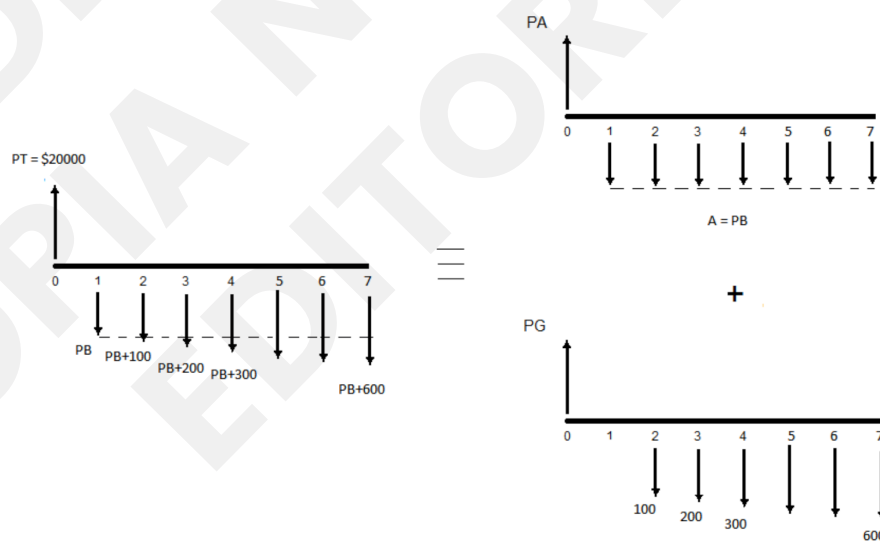


Figura 9.7

Cálculo del Pago Base

$$P_T = P_A + P_G$$

$$20000 = A (P/A, 15\%, 7) + G (P/G, 15\%, 7)$$

$$20000 = P_B * 4,1604 + 100 * 10,1924$$

$$18980,76 = P_B * 4,1604 \quad \therefore \quad P_B = \$ 4562,24$$

Valor del Pago en el último semestre

$$\text{1er Pago, 1er Semestre} \quad P_B = \$ 4562,24$$

$$\text{2do Pago, 2do Semestre} \quad P_B + 100 = \$ 4662,24$$

$$\text{3er Pago, 3er Semestre} \quad P_B + 200 = \$ 4762,24$$

...

$$\text{7mo Pago, 7mo Semestre} \quad P_B + 700 = \$ 5262,24$$

Ejercicio resuelto 9.4

Para el Gradiente Decreciente de la Figura 9.8 considere un interés del 10% anual. Encuentre el Valor Presente equivalente al gradiente ilustrado en dicha figura.

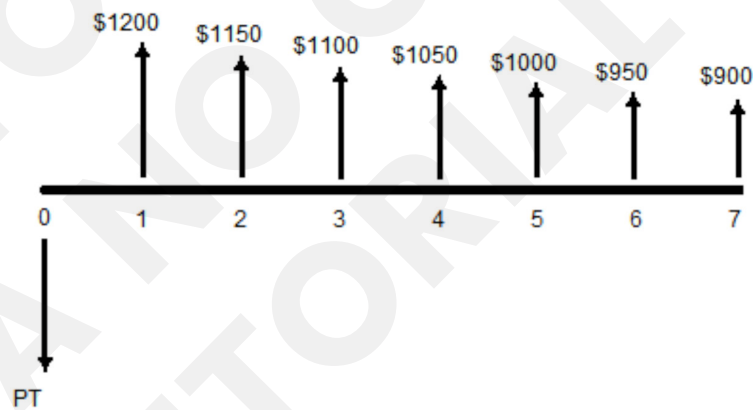


Figura 9.8

El Gradiente que incluye el Pago Base sugerido en la Figura 9.8 se descompone en una Anualidad cuyo valor es igual al Pago Base y en un Gradiente Convencional (inicia en el año 2 y se ignora el Pago Base). Esta descomposición se ilustra en la Figura 9.9.

Observando las figuras, podemos concluir:

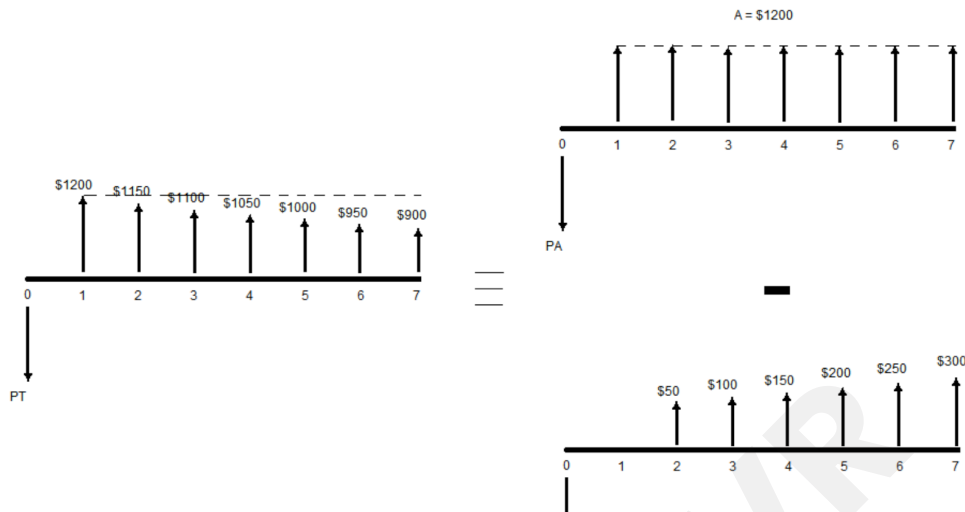


Figura 9.9

$$P_T = P_A - P_G$$

$$P_T = A (P/A, 10\%, 7) - G (P/G, 10\%, 7)$$

$$P_T = 1200 * 4,8684 - 50 * 12,7631$$

$$P_T = \$5203,93$$

9.4 Gradientes Geométricos

A los Gradientes Geométricos también se los conoce como Series Geométricas o Escalonadas. Estos surgen cuando los flujos cambian en un porcentaje constante en períodos de pago consecutivos, por ejemplo: 10% anual.

En la Figura 9.10 se ilustra un Gradiente Geométrico. Como se puede apreciar, el Pago Base (\$100) va aumentando en un 10% (factor 1,1) en cada período.

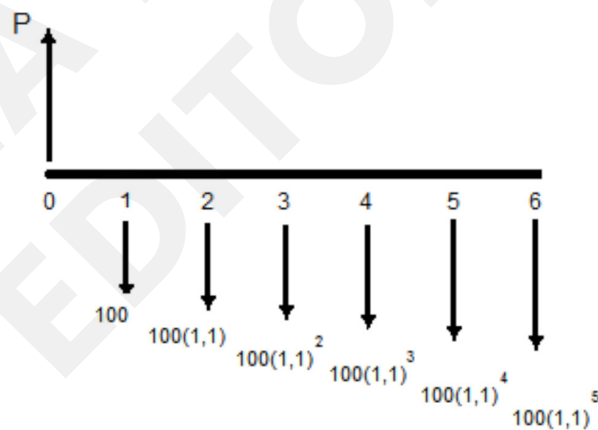


Figura 9.10

Otra forma de conceptualizar los Gradientes Geométricos es la siguiente. En los Gradientes Geométricos, las cantidades colocadas en los Flujos de Efectivo forman una Progresión Geométrica. Por ejemplo, para el Gradiente presentado en la Figura 9.10, las cantidades de los Flujos de Efectivo son: $100, 100(1.1), 100(1.1)^2, 100(1.1)^3, 100(1.1)^4, 100(1.1)^5$. Si consideramos a esta secuencia de números como una Progresión Geométrica, la razón es 1.1. Recordemos que en una Progresión Geométrica la razón se obtiene dividiendo un término cualquiera (que no sea el primero) para el inmediato anterior.

9.4.1 Deducción de la fórmula de Valor Presente para un Gradiente Geométrico Uniforme

Para la presente deducción, considere la Figura 9.11

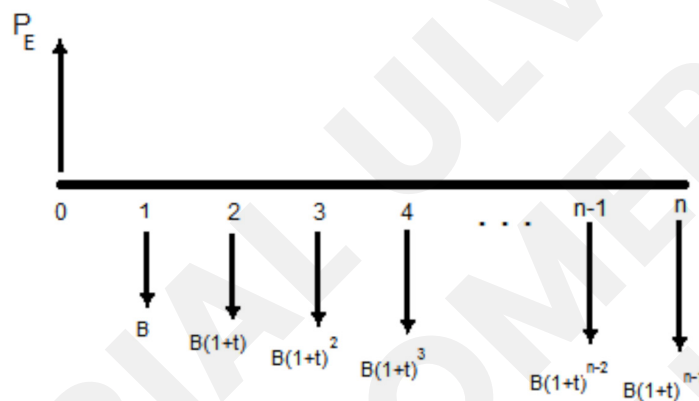


Figura 9.11

Sean

P_E : Valor Presente del Gradiente Geométrico

B : Cantidad en dólares en el año 1

t : Tasa de crecimiento geométrico en forma decimal

Se puede calcular el Valor Presente de cada uno de los Flujos de Efectivos mostrados en la Figura 9.11 de la siguiente manera:

$$P_E = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \dots + P_{n-1} + P_n$$

$$P_E = \frac{F_1}{(1+i)^1} + \frac{F_2}{(1+i)^2} + \frac{F_3}{(1+i)^3} + \frac{F_4}{(1+i)^4} + \dots + \frac{F_{n-1}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{F_n}{(1+i)^n}$$

$$P_E = \frac{B}{(1+i)^1} + \frac{B(1+t)}{(1+i)^2} + \frac{B(1+t)^2}{(1+i)^3} + \frac{B(1+t)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{B(1+t)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{B(1+t)^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Utilizando factor común:

$$P_E = B \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+t)}{(1+i)^2} + \frac{(1+t)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+t)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{(1+t)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+t)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]$$

Como se puede dar cuenta, la expresión en corchetes es la Suma de una Progresión Geométrica finita. En dicha Progresión, la razón es $(1+t)/(1+i)$, por tanto:

$$P_E = B \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{(1+t)}{(1+i)^2} + \frac{(1+t)^2}{(1+i)^3} + \frac{(1+t)^3}{(1+i)^4} + \dots + \frac{(1+t)^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{(1+t)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]_{S_n}$$

$$P_E = B * S_n \quad (1)$$

Calculamos el valor de dicha suma que la hemos llamado S_n .

Recordemos que la Suma de términos de una Progresión Geométrica finita viene dada por la expresión:

$$S_n = \frac{a_1(R^n - 1)}{R - 1} \quad (2)$$

Para la expresión (2) los valores de a_1 y R son:

$$a_1 = \frac{1}{(1+i)^1}$$

Para calcular R se debe recordar que en una Progresión Geométrica, R se obtiene dividiendo un término cualquiera (que no sea el primero) para el término inmediato anterior. Por tanto:

$$R = \frac{\frac{(1+t)}{(1+i)^2}}{\frac{1}{(1+i)^1}} = \frac{1+t}{1+i}$$

Remplazando los valores de a_1 y R en la ecuación (2):

$$S_n = \frac{\frac{1}{(1+i)^1} \left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{1+t}{1+i} - 1} = \frac{\left(\frac{1}{1+i} \right) \left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{t-i}{1+i}} = \frac{(1+t)^n - 1}{t-i} \quad (3)$$

Remplazando (3) en (1):

$$P_E = B \frac{[(1+t)^n - 1]}{t-i} \quad (9.7)$$

Para valores de $t = i$, la ecuación 9.7 se convierte en la ecuación 9.8 como sigue a continuación:

$$P_E = B \left(\frac{n}{1+t} \right) \quad (9.8)$$

Demostración de la ecuación 9.8

En la ecuación 9.7, si $t = i$ se produce la indeterminación $0/0$ por lo tanto puede usarse la *Regla de L'Hospital* cuyo enunciado dice:

“ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a$ y además se cumple lo siguiente:

1. $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en a y
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ “

Partimos luego de la fórmula 9.7 donde existe la indeterminación si $t = i$:

$$P_E = B \frac{\left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{t-i}$$

$$\lim_{i \rightarrow t} B \frac{\left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{t-i} = \lim_{i \rightarrow t} \frac{\frac{dP_1}{dt}}{\frac{dP_2}{dt}} = \lim_{i \rightarrow t} \frac{B \left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]'}{(t-i)'}$$

$$\lim_{i \rightarrow t} \frac{B \left[\frac{n(1+t)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]}{1} = \lim_{i \rightarrow t} B \left[\frac{n(1+t)^{n-1}}{(1+i)^n} \right]$$

Considerando que $i \rightarrow t$, se tiene:

$$P_E = B \left[\frac{n(1+t)^{n-1}}{(1+t)^n} \right] = B \left(\frac{n}{1+t} \right)$$

l.q.q.d

Ejercicio resuelto 9.5

Una camioneta con grúa tiene un valor inicial de \$ 83500. Se considera que el *Valor Residual* (también llamado *Valor de Salvamento* o *Valor de Rescate*) luego de 5 años sea de \$12000.

El costo de mantenimiento de dicho equipo será de \$800 en el primer año y éste se incrementará anualmente en un 10%.

Se pide calcular el Valor Presente del vehículo con la grúa si la tasa de interés es del 7% anual.

El enunciado del problema se ilustra en la Figura 9.12.

De acuerdo a lo discutido a lo largo de los capítulos, el Valor Presente es:

$$P_T = -83500 - P_E + 12000 (P/F, 7\%, 5)$$

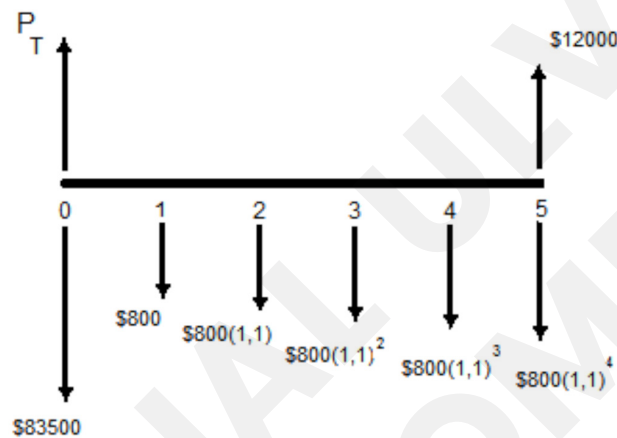


Figura 9.12

Remplazando con las fórmulas respectivas:

$$P_T = -83500 - B \left[\frac{\left(\frac{1+t}{1+i} \right)^n - 1}{t-i} \right] + 12000 (1+0,07)^{-5}$$

$$P_T = -83500 - 800 \left[\frac{\left(\frac{1+0,1}{1+0,07} \right)^5 - 1}{0,1-0,07} \right] + 12000 (1+0,07)^{-5}$$

$$P_T = -\$ 78898,07$$

El signo negativo del resultado indica que en el DFC el Valor Presente estaría dirigido hacia abajo pues es más la inversión realizada que lo recuperado en este caso.

Para evitar que la respuesta salga negativa se pudo haber planteado la ecuación inicial de la siguiente manera: $P_T = 83500 + P_E - 12000 (P/F, 7\%, 5)$

9.5 Gradientes Diferidos

Como se indicó los Gradientes Convencionales inician en el período 2 y su valor Presente comienza en el período 0. Se puede generalizar esto diciendo que *el Valor Presente de un Gradiente Uniforme siempre estará ubicado 2 periodos antes de que el Gradiente empiece*.

Los Gradientes Diferidos son aquellos en los cuales los Pagos o las Rentas se aplazan e inician mucho después del período 2. El Valor Presente de un Gradiente Diferido se encontrará también 2 periodos antes que el Gradiente inicie, por tanto el punto clave es determinar el inicio del Gradiente pues pueden presentarse DFCs con Anualidades y Gradientes combinados y consecutivos.

A continuación se ilustra lo expuesto en los siguientes ejercicios resueltos.

Ejercicio resuelto 9.6

Determine la posición del Valor Presente del Gradiente Diferido mostrado en la Figura 9.13.

La posición requerida se ilustra en la Figura 9.14.

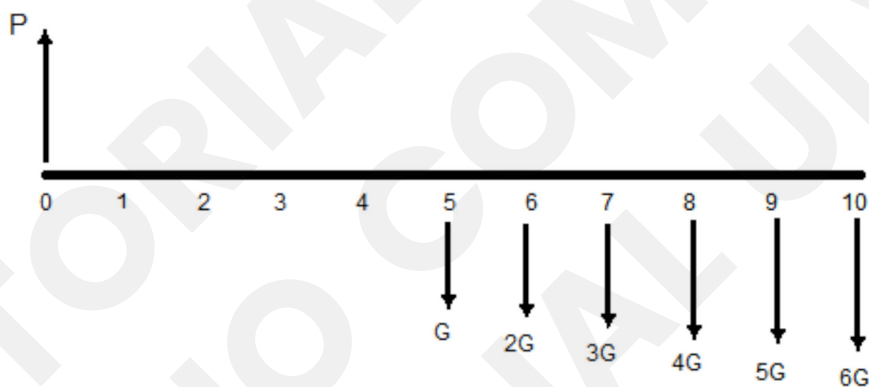


Figura 9.13

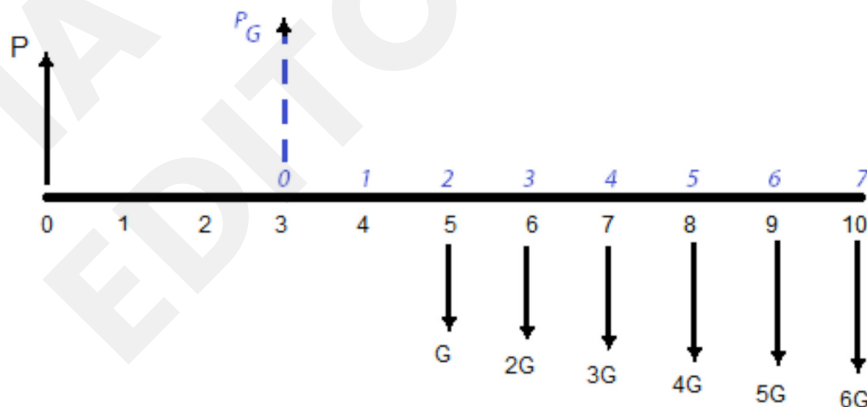


Figura 9.14

Ejercicio resuelto 9.7

Determine la posición del Valor Presente del Gradiente Diferido mostrado en la Figura 9.15.

La posición requerida se ilustra en la Figura 9.16, donde se descompone el DFC descrito en la Figura 9.15 en 2 DFC, el uno con dos Anualidades y el otro con un Gradiente Diferido.

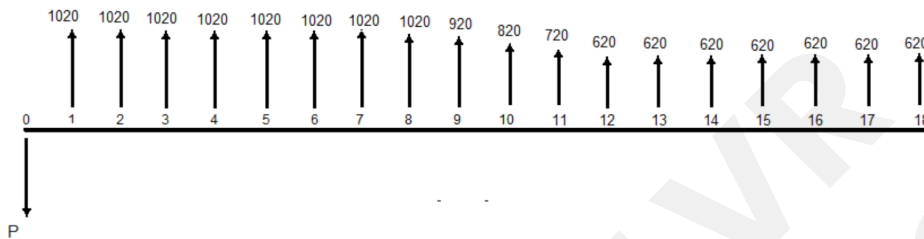


Figura 9.15

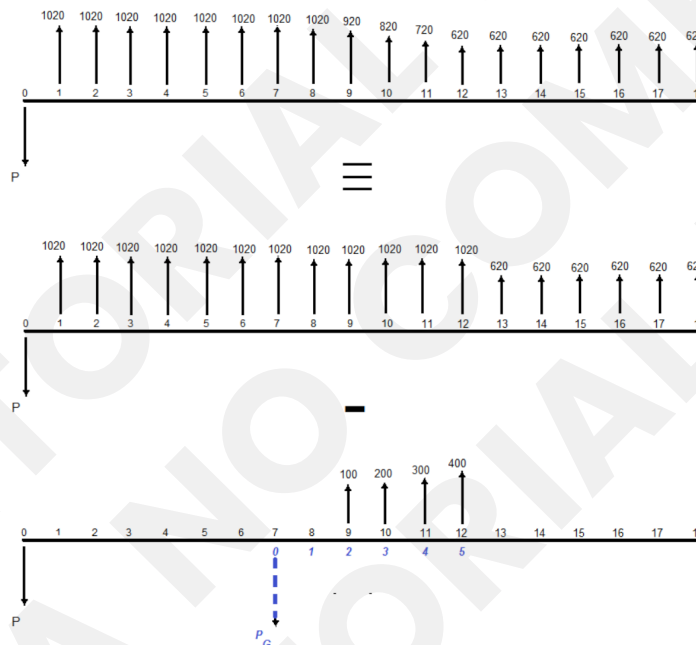


Figura 9.16

Ejercicio resuelto 9.8

Calcule el Valor Futuro luego de 10 años equivalente a un valor de \$5000 invertido hoy y una anualidad ordinaria (inicia en el período 1) de \$3000 durante 5 años. A partir de entonces, la anualidad comienza a aumentar anualmente en un 10% durante los 5 años siguientes. Considere una tasa de interés del 5% anual.

El enunciado de este ejercicio se ilustra en la Figura 9.17.

El DFC de la Figura 9.17 podría *re-dibujarse* como se indica en la Figura 9.19.

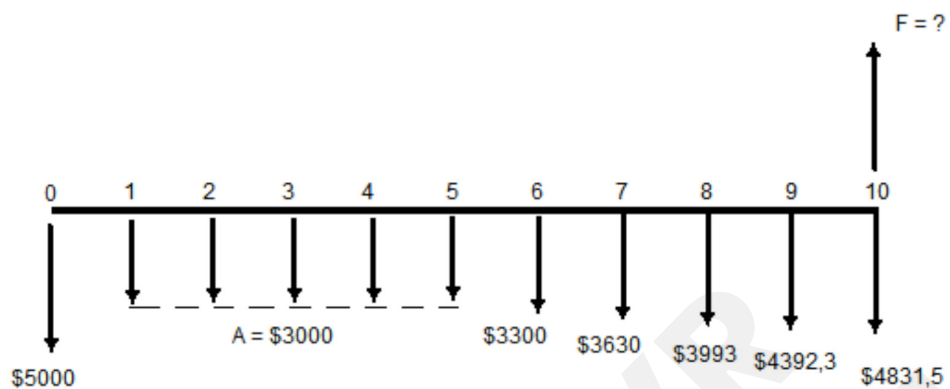
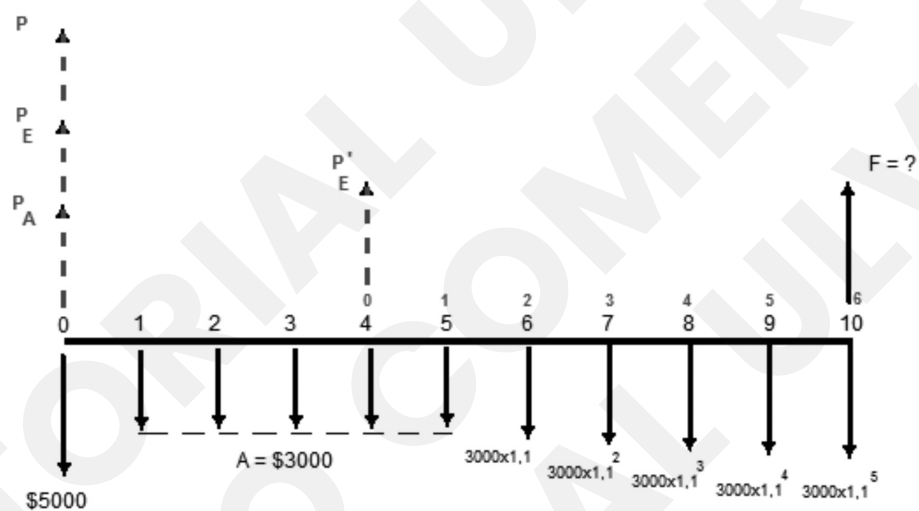


Figura 9.17



El problema planteado puede resolverse de varias formas. Entre ellas podría llevarse a Valor Futuro cada uno de los Flujos de Efectivo mostrados originalmente en la Figura 9.17 y sumarlos. Pero este método es básico y en caso de que existan más Flujos de Efectivo, resultaría tedioso aplicarlo.

Por tanto se va a calcular el Valor Presente del Gradiente Geométrico, de la Anualidad de \$3000, se los sumará a los \$5000 invertidos hoy para tener un solo valor Presente. Este Valor Presente se llevará a Valor Futuro para responder la pregunta del problema.

Para esto, se considera la siguiente nomenclatura. Sean:

P'_E : Valor Presente del Gradiente Geométrico que inicia en el año 6.

Este Valor Presente se ubica en el año 4.

P_E : Valor Presente del Gradiente Geométrico que inicia en el año 6.

Este Valor Presente se ubica en el año 0 y es el Valor Presente de la cantidad futura P'_E

P_A : Valor Presente de la Anualidad Ordinaria de \$3000.

Este Valor Presente se ubica en el año 0.

$$P = 5000 + P_A + P_E \quad (1)$$

Cálculo de P_A

$$P_A = A (P/A, 5\%, 4)$$

$$P_A = 3000 * 3,5460$$

$$P_A = \$ 10638$$

Cálculo de P_E

Antes de calcular P_E , se debe calcular P'_E . Para esto, se debe tener presente la fórmula 9.7.

$$P'_E = B \frac{\left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{t - i}$$

$$P'_E = 3000 \frac{\left[\frac{(1+0,1)^6}{(1+0,05)^6} - 1 \right]}{0,1 - 0,05}$$

$$P'_E = \$ 19318$$

Ahora se puede calcular P_E considerando a P'_E un Valor Futuro.

$$P_E = F (P/F, 5\%, 4)$$

$$P_E = P'_E (P/F, 5\%, 4)$$

$$P_E = 19318 * 0,8227$$

$$P_E = \$ 15892,9$$

Se considera ahora nuevamente la ecuación 1 para calcular P:

$$P = 5000 + P_A + P_E$$

$$P = 5000 + 10638 + 15892,9$$

$$P = \$ 31530,9$$

Por último P (Valor Presente en el año 0), se lo lleva a Valor Futuro. Se tendría:

$$F = P (F/P, 5\%, 10)$$

$$F = 31530,9 * 1,6289$$

$$F = \$ 51360,7$$

Problemas propuestos

- Una compañía que comercializa productos tecnológicos cree que el próximo año tendrá un ingreso de \$ 25000 con el remate de algunos de ellos. También cree que las ventas aumentarán uniformemente al lanzar al mercado productos con tecnología de punta hasta \$ 225000 en los próximos 11 años. Determine el gradiente y elabore el DFC.

R/. \$ 20000

- Una firma que cerró sus operaciones, presentó los ingresos en descenso en los últimos 7 años. El primero fue de \$ 10500, el segundo de \$ 10000, y así sucesivamente hasta que llegaron a cero. ¿Qué tiempo en años tomó para que los ingresos lleguen a cero?

R/. 22 años.

- Encuentre el Valor Presente considerando el Gradiente Aritmético Creciente mostrado en la Tabla 9.1 si la tasa de interés es del 15% anual convertible semestralmente.

Datos para el problema propuesto 3

Mes	1	2	3	4	5	6
Flujo	\$ 4500	\$ 5100	\$ 5700	\$ 6300	\$ 6900	\$ 7500

Tabla 9.1

R/. \$ 34398,82

4. Encuentre el Valor Presente considerando el Gradiente Aritmético Decreciente mostrado en la Tabla 9.2 si la tasa de interés es del 12% anual convertible quincenalmente.

Datos para el problema propuesto 4

Mes	1	2	3	4	5
Flujo	\$ 55500	\$ 54500	\$ 53500	\$ 52500	\$ 51500

Tabla 9.2

R/. \$ 259736,23

5. Juan González invierte dinero durante algunos años y luego, a partir del año 7, recibe dinero fruto de la inversión en forma de Gradientes como se muestra en la Tabla 9.3. Considerando los flujos indicados, encuentre:
- a. el Valor Presente Neto y
 - b. la Anualidad equivalente.

Suponga un interés compuesto del 10% anual.

Datos para el problema propuesto 5

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Flujo	-1000	-1400	-1800	-2200	-2600	1200	1000	800	600	400	200

Tabla 9.3

R/. a) \$ -3246; b) \$ -499,75

6. El Sr. Delgado solicita un préstamo de \$ 10000 a una Institución Financiera y se compromete a pagarlo con 12 abonos mensuales. El primer abono lo realizaría luego de 15 días. Los abonos aumentan en \$ 150 dólares cada vez y se considera un interés del 12% anual convertible quincenalmente. Calcule:

- a. La tasa efectiva mensual.
- b. El valor del primer abono.
- c. ¿Cuánto pagó por intereses?

R/. a) 1,0025% mensual; b) \$ 77,03; c) \$ 824,36

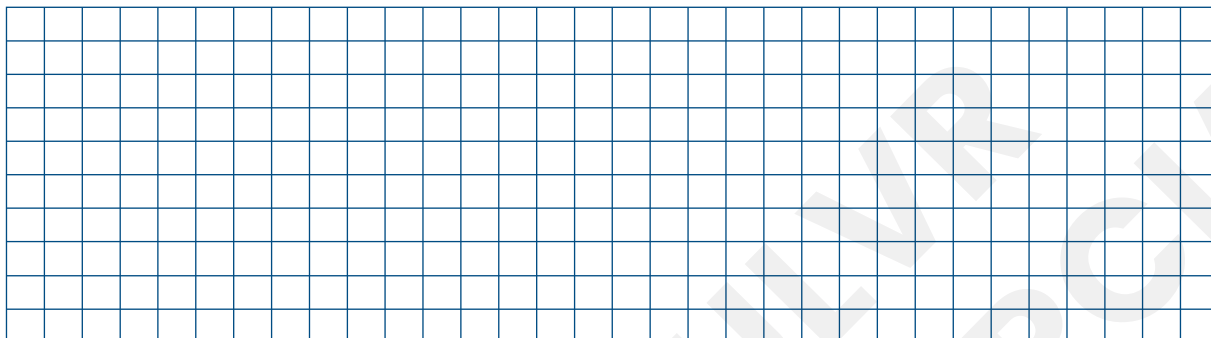
7. Los flujos de efectivo dados en la Tabla 9.4 representan un préstamo recibido por Juan y los pagos respectivos durante 5 años. Dibuje el DFC y encuentre cuál debe ser el valor de Z para que los flujos de efectivo negativos sean iguales al flujo de efectivo positivo en el período cero. Utilice una tasa de interés del 10% anual.

Datos para el problema propuesto 7

Año	0	1	2	3	4	5
Flujo	1500	-150	-250	-350	-450	-Z

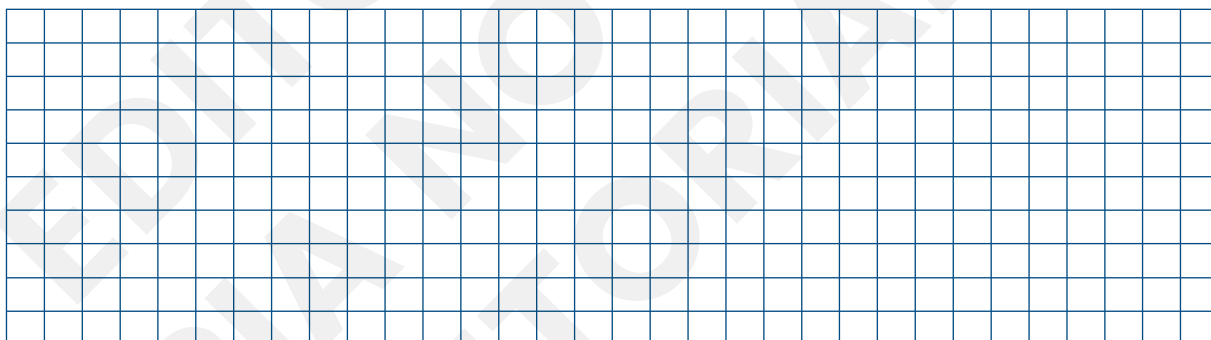
Tabla 9.4

R/. \$ 945



8. Una empresa que ofrece el servicio de envío de encomiendas a domicilio dentro del país adquiere un camión para recorrer las rutas predeterminadas. El costo inicial del camión es de \$ 65000 y al venderlo 10 años después se tiene un valor residual (valor de rescate o valor de salvamento) de \$ 10000. Los costos de operación y mantenimiento anuales son de \$ 5000 los 4 primeros años y estos costos se incrementan luego anualmente en un 8%. Considerando una tasa de interés del 12% anual, calcule el valor presente de las flujos mencionados debido a la adquisición, costos de operación y mantenimiento y venta del camión.

R/. \$ 93786,66



9. Asuma que los flujos de caja mostrados en la Tabla 9.5 en forma de un Gradiente aritmético decreciente diferido corresponden a los depósitos de Ma. Beatriz realiza en una Financiera para obtener en un futuro algún rédito. Suponiendo que el interés es del 10% anual, con respecto a dichos flujos, calcule:

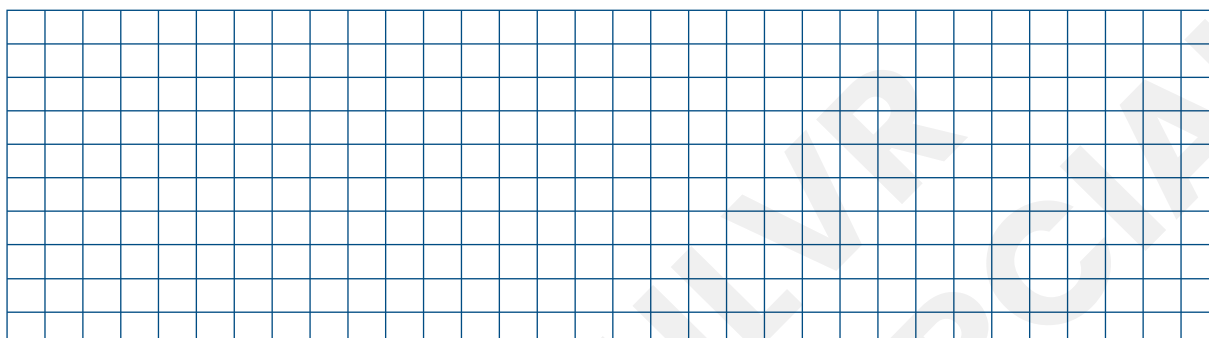
- El Valor Presente en el año 0.
- El Valor Futuro en el año 11.

Datos para el problema propuesto 9

Año	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Flujo	-	-	-	-	-	-	-900	-800	-700	-600	-500	-400

Tabla 9.5

R/. a) 1832,5; b) 5228,3



Preguntas de Autoevaluación

1. Defina lo que es un Gradiente.
2. ¿Qué entiende por Pago Base?
3. ¿Cuál es la fórmula para encontrar el valor de un Gradiente dados el Flujo inicial y final así como el número de períodos?
4. Realice una clasificación de los tipos de Gradientes.
5. ¿Qué entiende por Gradiente Uniforme?
6. Dibuje un Gradiente Decreciente
7. ¿En qué se diferencia un Gradiente Aritmético de un Gradiente Geométrico? Dibújelos utilizando toda la nomenclatura correspondiente.
8. Explique el procedimiento para calcular el Valor Presente de un Gradiente Uniforme Convencional donde se incluye el Pago Base.
9. ¿En qué período inicia un Gradiente Convencional? ¿Y un Gradiente Diferido?
10. ¿Qué procedimiento seguiría para resolver un problema que combine Anualidades y Gradientes de distinto tipo? ¿Qué criterios tendría presente sobre la ubicación del Valor Presente de las Anualidades y Gradientes?

Objetivos:

- Definir desde distintas perspectivas el Valor Actual Neto.
- Resolver ejercicios que muestren el cálculo del Valor Actual Neto.

10.1 Definición de Valor Actual Neto

Se presentan a continuación varias definiciones:

1. El Valor Actual Neto (VAN) o Valor Presente Neto (VPN) es la diferencia entre el Valor Presente de los Flujos de beneficio y el Valor Presente de los Flujos de inversión. El VAN compara Costo – Beneficio, es decir si el Beneficio supera o no al Costo.

Para encontrar los Valores Presentes mencionados se requiere de una Tasa de interés o de descuento (el costo de capital del Proyecto).

2. El VAN representa el valor presente de los flujos de efectivo que se esperan recibir en el futuro, considerando una Tasa de interés conocida como la TMAR.

La TMAR (demanda) vendría a ser la tasa que demanda o exige el inversionista.

Un proyecto puede tener varias TMAR, porque depende de:

- Quien lo evalúe
- Depende de cómo se financie el proyecto
- Depende que tipos de flujo maneje el proyecto
- Qué tipo de negocio, qué tipo de sector
- Qué tipo de plazo, etc

Al ser un número, el VAN puede ser positivo, cero o negativo. Analicemos cada caso:

- Un $VAN > 0$ significa que el proyecto se acepta.
- ¿Un $VAN = 0$ significa ausencia de ganancias o que no gané ni perdí?
- Un $VAN = 0$ significa que si gané una tasa de interés ésta es exactamente igual a la que yo estaba esperando. Si obtuve rendimiento pero resultó ser que la $TMAR$ que yo esperaba fue igual a la que el proyecto me terminó dando. Pero hay una ganancia que es la rentabilidad en este caso. Lo que no hay es un excedente, no hay una holgura, no hay un exceso de rendimiento o retornos anormales.
- Un $VAN < 0$ significa que el proyecto no se acepta.

Para encontrar el VAN en Excel se puede utilizar la función $vna()$.

Esta función trabaja con Flujos de caja ordinarios o vencidos. Cualquier Flujo de caja que se ponga al inicio asume que está al final del 1er período.

Si el primer flujo está en 0 y lo pongo en esta fórmula, el flujo resultante va a ubicarse en el período -1.

Ejercicio resuelto 10.1

Una firma se dedica a la comercialización de repuestos para motos y se piensa ampliar el negocio con la venta de partes y piezas para bicicletas así como para complementos usados para la práctica del ciclismo. Para esto, se tiene previsto un desembolso inicial de \$12000 y los cobros y pagos que se generarían durante la vida del proyecto que es de 4 años se muestran en la Tabla 10.1.

Determinar según el criterio del Valor Actual Neto si conviene realizar la inversión considerando una Tasa de descuento del 6%.

Año	Cobros	Pagos
1	\$5000	\$2000
2	\$7000	\$2500
3	\$8000	\$3000
4	\$9000	\$6000

Tabla 10.1

Para resolver este problema primero obtenemos los Flujos Netos en cada año. Los mismos se aprecian en la Tabla 10.2

$$VAN = -P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$VAN = -12000 + 3000(1+0,06)^{-1} + 4500(1+0,06)^{-2} + 5000(1+0,06)^{-3} + 3000(1+0,06)^{-4}$$

Año	Cobros	Pagos	Flujo Neto
0			-\$12000
1	\$5000	\$2000	\$3000
2	\$7000	\$2500	\$4500
3	\$8000	\$3000	\$5000
4	\$9000	\$6000	\$3000

Tabla 10.2

$$VAN = \$ 1409,5$$

Al ser el VAN positivo, la inversión sería aconsejable realizarla.

Ejercicio resuelto 10.2

Considere un proyecto que requiere una inversión inicial \$1200 y los Flujos de efectivo son de \$330 desde el año 1 al año 5. Si la Tasa de descuento es del 10%, determine si el proyecto es factible o no.

La inversión inicial y los Flujos de Efectivo para la situación descrita se detallan en la Tabla 10.3

Período	0	1	2	3	4	5
Flujo Neto	-1200	330	330	330	330	330

Tabla 10.3

1er Método

$$VAN = -P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4$$

$$VAN = -1200 + 330 (1+0,1)^{-1} + 330 (1+0,1)^{-2} + 330 (1+0,1)^{-3} + 330 (1+0,1)^{-4} + 330 (1+0,1)^{-5}$$

$$VAN = \$ 50,95$$

2do Método

Usando la Tabla de Factores de Interés Compuesto dada en el Apéndice D.

$$VAN = -P_0 + A (P/A, 10\%, 5)$$

$$VAN = -1200 + 330 * 3,7908$$

$$VAN = \$ 50,96$$

3er Método

Usando la fórmula 5.1 para encontrar el Valor Presente dada una Anualidad Ordinaria

$$VAN = -P_0 + A (P/A, 10\%, 5)$$

$$VAN = -P_0 + A \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \right]$$

$$VAN = -1200 + 330 \left[\frac{1 - (1 + 0,1)^{-5}}{0,1} \right]$$

$$VAN = \$ 50,96$$

Por los 3 métodos descritos se ha llegado a la misma respuesta y al ser el VAN positivo, la inversión es factible.

Ejercicio resuelto 10.3

Se realiza un proyecto de inversión con una duración de 5 años.

La inversión inicial del proyecto asciende a \$ 1500. Luego de la inversión inicial se espera obtener cada año 1000 unidades de un producto, las mismas que se esperan vender por \$ 3,5 la unidad. Los costos anuales asociados a este proyecto son de \$3000.

Si se descartan los impuestos y se asume una Tasa de descuento del 12%, ¿ sería factible invertir en el mencionado proyecto ?

Los datos dados en el enunciado y los cálculos para encontrar los Flujos netos se estructuran en la Tabla 10.4.

Período	0	1	2	3	4	5
Inversión	-1500					
Producción		1000	1000	1000	1000	1000
PVP		3,5	3,5	3,5	3,5	3,5
Ventas		3500	3500	3500	3500	3500
Costos		-3000	-3000	-3000	-3000	-3000
Utilidad		500	500	500	500	500
Flujo neto	-1500	500	500	500	500	500

Tabla 10.4

3. En la Tabla 10.6 se presentan los Flujos netos de caja de 3 proyectos que una empresa desea evaluar. Si se considera una tasa de descuento del 10%, ¿qué proyecto elegiría?

Datos para el Problema propuesto 3

	Flujos netos de caja		
	Proyecto A	Proyecto B	Proyecto C
Inversión	10'000000	20'000000	16'000000
Año 1	0	4'000000	4'500000
Año 2	0	5'000000	5'000000
Año 3	5'500000	6'000000	8'000000
Año 4	8'000000	7'000000	3'000000
Año 5	3'500000	8'000000	3'000000

Tabla 10.6

R/. $VAN_A = \$1'769563,68$; $VAN_B = \$2'024948,62$; $VAN_C = \$2'145463,24$

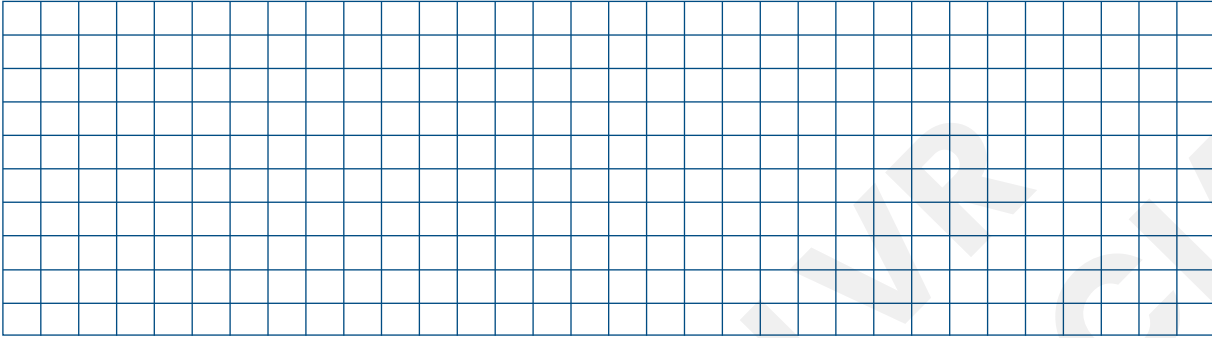
El proyecto más conveniente es el que tiene un VAN mayor, es decir el Proyecto C

4. En una empresa se piensa adquirir una máquina con tecnología de punta la cuál cuesta 5'000000 €. La máquina permitiría tener unos Flujos netos de caja de 1'500000 € durante 6 años, tiempo en el cual se deberá pensar en una actualización o en la compra de un nuevo equipo. Si la tasa de descuento es del 5% anual, calcular el VAN y decidir si debería hacerse la inversión.

R/. $VAN = \$ 2'613538,10$. La inversión debería llevarse a efecto en vista de que la contribución neta de la adquisición de la máquina es positiva.

5. Un proyecto que requiere una inversión de \$1900 producirá ingresos de \$500 durante 6 meses. Considerando tasas de descuento del 5% mensual y del 15% mensual, ¿a cuál de las 2 tasas el proyecto es viable?

R/. 5%: VAN \$637,85; 15%: VAN \$-7,76. Por tanto el proyecto es viable a una tasa de descuento del 5%.



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Qué entiende por el Valor Actual Neto o también llamado Valor Presente Neto?
2. ¿Qué es la TMAR?
3. ¿Puede un proyecto tener varias TMAR? Explique.
4. ¿Cómo interpreta el hecho de que el VAN sea igual a cero?
5. ¿Qué ocurre cuando el VAN es positivo? ¿Y cuando es negativo?
6. ¿Qué argumentos tiene la función vna() de Excel para calcular el Valor Actual Neto?
7. ¿Existe alguna diferencia entre costo y gasto?

Objetivos:

- Definir desde distintas perspectivas la Tasa Interna de Retorno y precisar algunas consideraciones al respecto.
- Comparar el VAN con el TIR como herramientas para evaluación de proyectos.
- Resolver ejercicios que muestren los métodos para calcular el TIR.

11.1 Definición de la Tasa Interna de Retorno

A continuación se presentan varias definiciones y algunas consideraciones sobre la Tasa Interna de Retorno (TIR):

1. La TIR es la tasa que ofrece el proyecto. Por eso la TIR se lo relaciona con la Oferta.
2. Es la Tasa a la cual:
 - *El Valor Presente de los desembolsos (negativos) es igual al Valor Presente de los Ingresos (positivos).*
 - *El valor Presente de los Flujos de inversión (negativos) es igual al Valor Presente de los Flujos de beneficio (positivos).*
 - En otras palabras, es la tasa a la cual el $VAN = 0$
3. En el *punto de equilibrio*, $Oferta = Demanda$, es decir $TIR = TMAR$. Cuando esto ocurre, el VAN se hace cero. Cuando la tasa que me estaban ofreciendo por parte del proyecto es igual a la que yo estoy exigiendo o demandando entonces el $VAN = 0$.

¿Que más puede ocurrir entre el TIR y la TMAR?

$TIR > TMAR$, La tasa que ofrece el proyecto supera a la TMAR, es conveniente el proyecto por eso $VAN > 0$.

El proyecto me da una rentabilidad por encima de lo mínimo que yo estaba esperando.

El proyecto es factible y encima de ser factible me está dando *holgura* financiera (rendimiento adicional, rendimiento en exceso).

$TIR < TMAR$, no es conveniente el proyecto por eso $VAN < 0$.

El proyecto ofrece menos de lo que yo espero como mínimo. Existe *déficit* si yo invirtiese en el proyecto.

La rentabilidad que el proyecto me está dando está por debajo de lo que yo quiero como mínimo, entonces $VAN < 0$

¿ Cuando la $TIR < TMAR$, significa que el proyecto no es rentable ?

¿ Cuando la $TIR < TMAR$, significa que el proyecto no está ofreciendo un rendimiento ?

Significa que ofrece un rendimiento pero no es atractiva para el inversionista.

El proyecto es rentable o puede que sea rentable o puede ser rentable, pero la rentabilidad que está ofreciendo no está acorde con lo que yo como inversionista estoy buscando.

¿ Cuándo el proyecto sería **NO** rentable ?

Cuando esté por debajo de la rentabilidad que estoy buscando como mínimo (debajo de la $TMAR$). El proyecto no es rentable para mis expectativas, para las expectativas de otro puede que lo sea.

Para calcular la TIR en Excel se pueden utilizar las fórmulas $tasa()$ o $tir()$.

- Si se usa la fórmula $tasa()$ existe una restricción. Los Flujos de Caja deben formar una anualidad.
- Con la fórmula $tir()$, los Flujos de caja pueden ser distintos o pueden formar una anualidad. El argumento estimar en esta fórmula se puede omitir.

11.2 Algunas consideraciones adicionales sobre la TIR.

Al resolver la ecuación: Valor Presente de los desembolsos = Valor Presente de los ingresos, puede que:

- A veces la TIR no esté definida. Esto puede ocurrir por ejemplo cuando todos los Flujos que se presentan en un Proyecto tienen el mismo signo. Ejemplo:

Período	0	1	2	3	4
Flujos	-1500	-200	-100	-500	-800

- Existan proyectos en los cuales la TIR no es única, es decir hayan múltiples TIR. Ejemplo:

Período	0	1	2
Flujos	-1500	3000	-1200

La condición para evitar múltiples TIR es que los Flujos no deben de cambiar de signo más de una vez. El número de tasas distintas será igual al número de cambios de signo que existan en los Flujos del Proyecto.

Ejemplos de proyectos con una sola TIR:

{	-2500,	800,	800,	800,	800,	800	}
{	-3000,	-500,	-1000,	1800,	2800,	1700	}

Ejemplos de proyectos con múltiples TIR:

{	-10000,	8000,	-3000	}			
{	-12000,	3000,	3000,	3000,	3000,	-1720	}

11.3 TIR versus VAN

Se presenta una comparación entre las características de la TIR y del VAN en la Tabla 11.1.

TIR vs VAN

TIR	VAN
Existen casos en que la TIR no está definida, por ejemplo cuando todos los Flujos de efectivo asociados con el proyecto tienen el mismo signo	El VAN siempre está definido.
Hay proyectos para los cuales la TIR no es única (existen múltiples TIR). Para evitar esto, los Flujos de efectivo asociados con el proyecto no deben cambiar de signo más de una vez.	El VAN siempre es único.

Tabla 11.1

11.4 Si el VAN y la TIR dan recomendaciones contrarias

En el caso de que el VAN y la TIR den recomendaciones contradictorias, es preferible considerar la recomendación del VAN.

Asumamos los siguientes Flujos de efectivo para 2 Proyectos:

Proyecto A: { -1500, 1000, 500, 300, 800 } $TIR_A = 29,2\%$

Proyecto B: { -1500, 700, 700, 505, 800 } $TIR_B = 28,5\%$

Para calcular el VAN, se requiere una Tasa de descuento.

Si colocamos distintos valores de Tasas de descuento, se tendría distintos valores de VAN para los Proyectos A y B. Entonces podemos hacer un análisis. Véase Tabla 11.2

Valores de VAN para distintos valores de Tasas de descuento

Tasa	VAN_A	VAN_B
15.0%	402.29	427.44
15.5%	384.84	408.07
16.0%	367.68	389.03
16.5%	350.80	370.30
17.0%	334.19	351.88
17.5%	317.85	333.76
18.0%	301.77	315.94
18.5%	285.95	298.41
19.0%	270.38	281.16
19.5%	255.05	264.19
20.0%	239.97	247.49
20.5%	225.12	231.06
21.0%	210.50	214.89
21.5%	196.11	198.97
22.0%	181.93	183.30
22,46%	169.09	169.10
22.5%	167.98	167.88
23.0%	154.23	152.69
23.5%	140.69	137.74
24.0%	127.36	123.02
24.5%	114.22	108.52
25.0%	101.28	94.24
25.5%	88.53	80.18
26.0%	75.96	66.33
26.5%	63.58	52.68
27.0%	51.38	39.24
27.5%	39.35	26.00
28.0%	27.50	12.95
28.5%	15.82	0.09
29.0%	4.30	-12.58
29.5%	-7.06	-25.07
30.0%	-18.26	-37.38

Tabla 11.2

Como se aprecia en la Tabla 11.2:

$$\text{Tasa} = 15\% \quad \text{VAN}_A = \$402,29 \quad \text{VAN}_B = \$427,44$$

$$\text{TIR}_A = 29,2\% \quad \text{TIR}_B = 28,5\%$$

De acuerdo al VAN, se seleccionaría el Proyecto B, pero de acuerdo al TIR deberíamos seleccionar el Proyecto A.

Con una Tasa del 22,46%, el VAN y el TIR dan la misma recomendación.

En general, para Tasas menores o mayores al 22,46% el VAN y el TIR se contradicen.

En la Figura 11.1 se grafica el VAN para distintas Tasas de descuento para ambos proyectos.

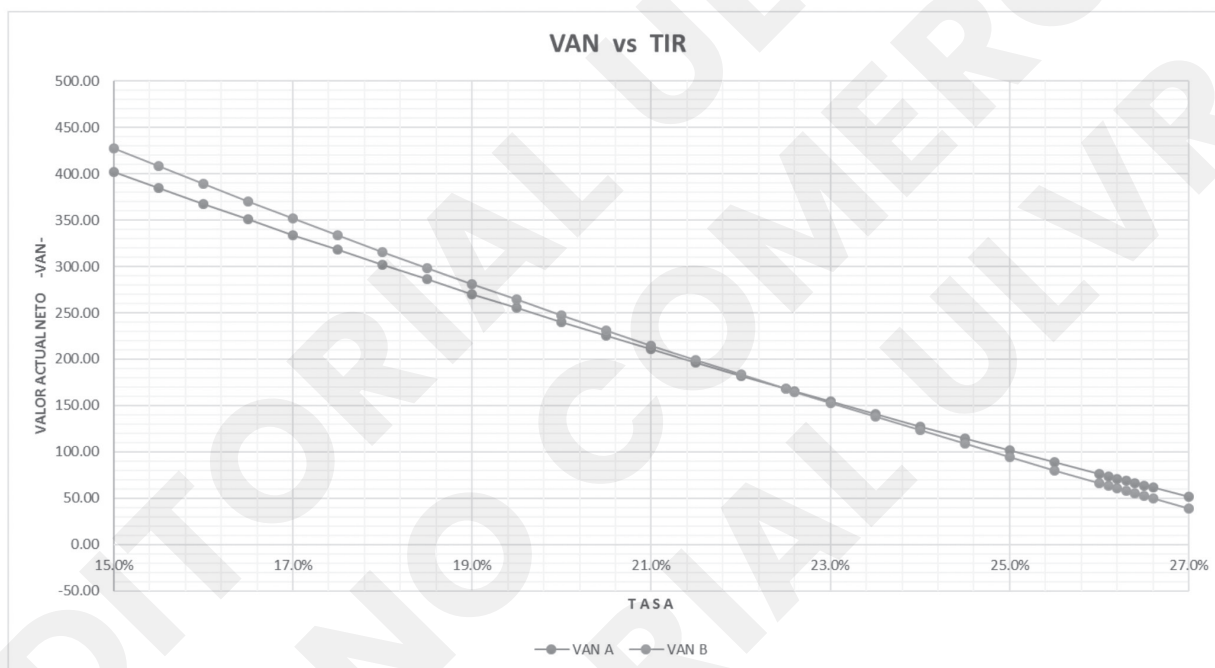


Figura 11.1

Ejercicio resuelto 11.1

Dada los Flujos de efectivo de un proyecto para 2 años en la Tabla 11.3, encontrar la TIR y determine si vale la pena invertir en el proyecto si la tasa mínima aceptable para el proyecto es del 30%.

Período	0	1	2
Flujo neto	-1000	1600	-200

Tabla 11.3

$$VAN = -P_0 + P_1 + P_2 = 0$$

$$VAN = -1000 + 1600(1+i)^{-1} - 200(1+i)^{-2} = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por $(1+i)^2$:

$$-1000(1+i)^2 + 1600(1+i) - 200 = 0$$

Multiplicando por -1 toda la ecuación:

$$1000(1+i)^2 - 1600(1+i) + 200 = 0$$

Dividiendo para 200 toda la ecuación:

$$5(1+i)^2 - 8(1+i) + 1 = 0$$

Usando la fórmula para resolver una ecuación cuadrática:

$$1+i = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 * 5 * 1}}{2 * 5}$$

$$1+i = \frac{8 \pm 6,63}{10}$$

$$1+i = 1,463 \quad \therefore \quad i = 0,463 \quad \therefore \quad i = 46,3\%$$

$$1+i = 0,137 \quad \therefore \quad i < 0 \quad \therefore \quad \text{Este valor de } i \text{ se descarta.}$$

Como TIR > Tasa mínima aceptable, se acepta invertir en el proyecto (46,3% > 30%).

Ejercicio resuelto 11.2

Un bar localizado en la exclusiva zona de Puerto Madero en Buenos Aires, Argentina desea hacer ciertas adecuaciones. Para ello necesita realizarse una inversión inicial de \$10000. Los flujos anuales de caja serán de \$3000 durante 4 años. El coste del capital del proyecto es del 8%.

Recurriendo a Excel, se ha realizado la Tabla 11.4 con distintos valores de Tasa y su respectivo VAN. La Tasa a la cual el VAN da 0 o aproximadamente 0 es la TIR del Proyecto.

Como se observa en la Tabla 11.4, el TIR para este proyecto es 15,2382%.

Ejercicio resuelto 11.3

En la vida real, el VAN y el TIR se calculan a partir de un Estado de Pérdidas y Ganancias como se muestra a continuación en la Figura 11.2

	0	1	2	3	4	5
Ventas		\$36,000,000.00	\$36,000,000.00	\$36,000,000.00	\$36,000,000.00	\$36,000,000.00
(-) Costo de ventas		\$15,720,000.00	\$15,720,000.00	\$15,720,000.00	\$15,720,000.00	\$15,720,000.00
Materia prima		\$12,960,000.00	\$12,960,000.00	\$12,960,000.00	\$12,960,000.00	\$12,960,000.00
Mano de obra directa		\$2,160,000.00	\$2,160,000.00	\$2,160,000.00	\$2,160,000.00	\$2,160,000.00
Costos indirectos de fabricación		\$600,000.00	\$600,000.00	\$600,000.00	\$600,000.00	\$600,000.00
(=) Ut. Bruta		\$20,280,000.00	\$20,280,000.00	\$20,280,000.00	\$20,280,000.00	\$20,280,000.00
(-) Gastos Operacionales		\$9,860,000.00	\$9,860,000.00	\$9,860,000.00	\$9,860,000.00	\$9,860,000.00
Gtos. Adm.		\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00
Gtos. Vtas.		\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00	\$150,000.00
Gtos. Gcales.		\$360,000.00	\$360,000.00	\$360,000.00	\$360,000.00	\$360,000.00
Deprec. Maq.		\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00
(=) Utilidad operacional/Utilidad Operativa		\$10,420,000.00	\$10,420,000.00	\$10,420,000.00	\$10,420,000.00	\$10,420,000.00
(+/-) Ingresos/Gastos no operativos						
Ganancia por venta activo fijo						\$4,000,000.00
Gtos. intereses		\$1,684,864.00	\$1,439,868.97	\$1,155,674.73	\$826,009.41	\$443,597.65
(=) Utilidad antes de impuestos		\$8,735,136.00	\$8,980,131.03	\$9,264,325.27	\$9,593,990.59	\$13,976,402.35
(-) I.R. (30%)	30% ?	\$2,620,540.80	\$2,694,039.31	\$2,779,297.58	\$2,878,197.18	\$4,192,920.71
(=) Utilidad Neta		\$6,114,595.20	\$6,286,091.72	\$6,485,027.69	\$6,715,793.41	\$9,783,481.65
(+) Depreciaciones		\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00	\$9,200,000.00
(-) Ganancia venta activo fijo						\$4,000,000.00
(-) Compra activos fijos						
(-) Capital Trabajo						
(+) Préstamos recibidos						
(-) Amortización del capital de la deuda		\$1,531,218.95	\$1,776,213.98	\$2,060,408.22	\$2,390,073.54	\$2,772,485.30
(+) Venta de activos fijos						\$4,000,000.00
(+) Recuperación del capital de trabajo						\$2,652,000.00
(=) Flujo de Caja		\$13,783,376.25	\$13,709,877.74	\$13,624,619.47	\$13,525,719.87	\$18,862,996.34
VAN (18.20%)						
TIR						
		\$2,707,719.98				
		20.90%				

Tabla 11.2

Tasa	VAN
5%	2988.43
6%	2637.09
7%	2300.59
8%	1978.13
9%	1668.95
10%	1372.36
11%	1087.69
12%	814.33
13%	551.69
14%	299.24
15%	56.47
15.10%	32.70
15.20%	9.03
15.21%	6.67
15.22%	4.30
15.23%	1.94
15.2382%	0.01
15.24%	-0.42
15.25%	-2.77
16%	-177.12
17%	-401.96
18%	-618.49
19%	-827.10
20%	-1028.16

Tabla 11.4

Problema propuesto

De la vida real

Un hombre que vive en EEUU jubilado de la Fuerza Aérea americana y actual ejecutivo de un concesionario de la BMW, presenta los siguientes bienes y deudas:

- Una casa en Texas valorada en \$ 350000, de la cual debe \$ 245000.

La deuda está pactada a 15 años debiendo realizarse pagos mensuales de \$ 2000. De esta casa no paga impuestos. La deuda la tiene desde el 2012.

Como sus ingresos han mejorado el americano, piensa que puede pagarla los próximos 4 años, es decir hasta el 2019.

- Una casa en Nebraska valorada en \$ 265000, de la cual debe \$ 145000.

La deuda está pactada a 15 años debiendo realizarse pagos mensuales de \$ 1700. De esta casa paga \$ 5000 de impuestos anuales. La deuda la tiene desde el 2010.

Como sus ingresos han mejorado el americano piensa que puede pagarla en los próximos 2 años, es decir hasta el 2017.

- Un terreno A en Nebraska valorado en \$ 45000. Este terreno es propio.
- Un terreno B en Nebraska valorado en \$ 45000. Este terreno es propio.

El americano piensa en varias *opciones de inversión*, de las cuales requiere saber cuál es la más idónea pues su deseo es vivir de las inversiones y sin deudas luego de 5 años (2020). Sus opciones de inversión son las siguientes:

- a. Construir una casa en cada uno los terrenos (2) de Nebraska realizando un préstamo a 30 años de 500000 dólares.

Cuando inicie la construcción, el préstamo se pagará considerando un interés del 7% anual. Cuando la casa esté construida se pagará un interés del 4% anual.

La construcción de las casas tardaría un año y medio.

Se supone que para construir cada casa se tendrá que invertir 240000 dólares.

Luego de construir las casas se espera ingresos de 1500 dólares mensuales al arrendarlas.

Se pagará un impuesto anual de 5000 dólares por cada una.

- b. Pagar la casa de Nebraska y recibir como arriendo 1500 dólares mensuales como ingreso que actualmente por la deuda no los percibe.
- c. Vender la casa y los terrenos en Nebraska y con el dinero recaudado comprar un terreno de 35 acres en San Antonio para que adecuándolo debidamente se convierta en un parqueadero.

Para que dicho proyecto genere rentabilidad se requiere invertir en los siguientes gastos:

- Valor del terreno, \$ 330000
- Cerramiento del terreno, \$ 200000
- Pavimentar el terreno (cascajo) \$ 200000
- Tecnología \$ 10000

Como ingresos se percibiría \$ 50 al mes por vehículo y se debe considerar también que el área del terreno permitiría parquear hasta 800 vehículos de todo tipo (incluyendo camiones, cabezales, ...)

- d. Vender la casa de Nebraska y tener su valor (\$ 265000) en un banco para luego buscar opciones de inversión en la Bolsa de Valores o bonos del estado.

Si el dinero lo invierte en una cuenta de ahorros, se percibiría una tasa de interés del 1% anual.

Si el dinero lo invierte en una póliza, se percibiría una tasa de interés del 3,5% anual

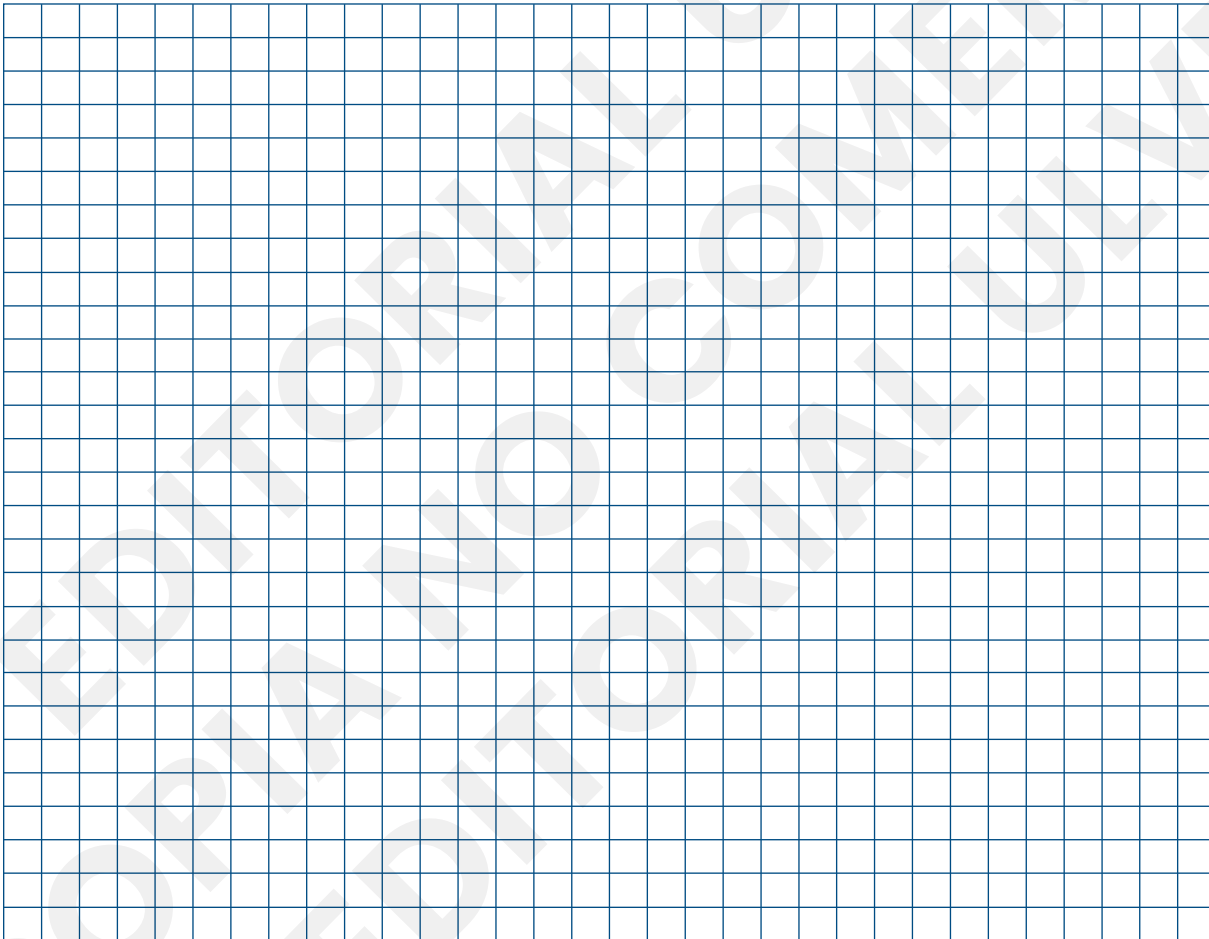
- e. Seguir pagando las casas poco a poco pero pedir un préstamo de \$ 500000 al banco para comprar un terreno de 35 acres en San Antonio y adecuarlo debidamente para que sea un parqueadero.

Cuando el parqueadero comience a producir:

pagar todas las deudas (incluyendo el préstamo) y

construir las casas de Nebraska

¿Qué alternativa de inversión es la más idónea?



Preguntas de Autoevaluación

1. ¿Qué entiende por la Tasa Interna de Retorno?
2. Defina con sus propias palabras lo que es la TMAR.
3. ¿Qué ocurre cuando un proyecto tiene $TIR = TMAR$, $TIR > TMAR$, $TIR < TMAR$?
4. ¿Si un proyecto tiene múltiples TIR, conviene basarse en la TIR o en el VAN?
5. ¿Qué haría si el VAN y el TIR se contradicen?
6. ¿Qué argumentos usa la función tasa() de Excel? ¿Qué restricción debe considerarse con esta función?
7. ¿Qué argumentos usa la función tir() de Excel? ¿Existe alguna restricción?
8. Elabore una tabla donde se contrasten las características del VAN y del TIR.
9. Defina lo que es el payback o período de recuperación.
10. Mencione y defina brevemente las herramientas más usuales para la evaluación de Proyectos.

Apéndice A

Progresiones Aritméticas

A.1 Definición

Una Progresión Aritmética es una secuencia de números reales, una serie de números reales en los cuales cualquier número luego del primero se obtiene sumando (o restando) una cantidad constante al anterior. A esta cantidad constante se conoce como *razón* o *diferencia* (r).

Se presentan varios ejemplos en la Tabla A.1

Progresión Aritmética	Razón (r)
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...	1
10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4	-2
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, ..., 2	$\frac{1}{4}$
10.5, 10, 9.5, 9, 8.5, 8, 7.5, ...	-0.5

Tabla A.1

A.2 Tipos de Progresiones Aritméticas

Las Progresiones Aritméticas se las puede clasificar de la siguiente manera:

Dependiendo del valor de la razón

Progresión Aritmética creciente, $r > 0$

Progresión Aritmética decreciente $r < 0$

Dependiendo del número de términos

Progresión Aritmética finita, si se conoce o se puede calcular el número de términos.

Progresión Aritmética infinita, si se desconoce el número de términos.

Algunos ejemplos se muestran en la Tabla A.2

Progresión Aritmética	Razón	Tipo de Progresión Aritmética
1, 2, 3, 4, 5, 6, ...	1	PA creciente infinita
10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4	-2	PA decreciente finita
$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$, ..., 2	$\frac{1}{4}$	PA creciente finita
10.5, 10, 9.5, 9, 8.5, 8, 7.5, ...	-0.5	PA decreciente infinita

Tabla A.2

A.3 Fórmulas utilizadas en Progresiones Aritméticas

A.3.1 Fórmula para encontrar la razón

$$\text{Razón } (r) = \text{Término cualquiera}^* - \text{Término inmediato anterior} \quad (\text{A.1})$$

* Que no sea el primer término.

A.3.2 Deducción de la fórmula del término n-ésimo.

El término n-ésimo (a_n) representa a cualquier término de la Progresión. Generalmente en la mayoría de ejercicios se lo toma como el último término.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_4 + r = a_1 + 3r + r = a_1 + 4r$$

...

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (\text{A.2})$$

En la formula A.2:

a_n : término n-ésimo

a_1 : primer término

n : número de términos de la Progresión

r : razón o diferencia

A.3.3 Deducción de la fórmula para la Suma de términos

Sea la PA: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

La suma de términos para dicha PA, podría expresarse de las siguientes formas:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

O utilizando la propiedad conmutativa de la suma (1) podría describirse así:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 \quad (2)$$

Sumando (1) y (2) se tendría:

$$2 S_n = (a_1+a_n) + (a_2+a_{n-1}) + (a_3+a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1}+a_2) + (a_n+a_1) \quad (3)$$

Cada suma en paréntesis de la expresión (3) tiene el mismo valor y es igual a $(a_1 + a_n)$, para ilustrar esto, considérese la PA: 1, 2, 3, 4, 5, ..., 98, 99, 100

Si se suman los términos de la PA anterior: $1+2+3+4+5+\dots+98+99+100$

$$1+100 = 2+99 = 3+98 = \dots 5+96 = \dots$$

Por tanto la expresión (3) se transforma en:

$$2 S_n = n (a_1 + a_n) \quad (\text{n porque son términos y por ende n sumas})$$

Despejando S_n :

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \quad (\text{A.3})$$

Ejercicio resuelto A.1

Calcule la suma de los 20 primeros términos de la PA: 3, 6, 9, 12, 15, ...

Primero se calcula la razón:

$$r = \text{Término cualquiera} - \text{Término inmediato anterior} \quad (\text{A.1})$$

$$r = 15 - 12 = 3$$

Se calcula el término a_{20} :

$$a_n = a_1 + (n-1) r \quad (\text{A.2})$$

$$a_{20} = a_1 + (20-1) * 3$$

$$a_{20} = 3 + (20-1) * 3$$

$$a_{20} = 60$$

Se calcula la suma de los 20 primeros términos:

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$S_{20} = 20 \left(\frac{a_1 + a_{20}}{2} \right)$$

$$S_{20} = 20 \left(\frac{3 + 60}{2} \right)$$

$$S_{20} = 630$$

Ejercicio resuelto A.2

Un hombre ahorra logra ahorrar \$3600 durante un número de meses. Para esto el primer mes ahorra \$25 y los meses siguientes \$50 más que el mes anterior. Durante cuántos meses debe ahorrar para que sus ahorros asciendan a los \$3600.

$$PA: \quad \underbrace{\$25, \$75, \$125, \$175, \dots}_{S_n = \$3600} \quad \therefore \quad r = \$50$$

Si utilizamos la fórmula del término n-ésimo:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (A.2)$$

$$a_n = 25 + (n-1) * 50$$

$$a_n = 25 + 50n - 50$$

$$a_n = 50n - 25 \quad (1)$$

Utilizando ahora la fórmula de la Suma de términos de una PA:

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$3600 = n \left(\frac{25 + a_n}{2} \right)$$

Reemplazando el valor de a_n , ecuación (1):

$$3600 = n \left(\frac{25 + 50n - 25}{2} \right)$$

$$7200 = 50n^2$$

$$n^2 = 144$$

$$n = 12 \text{ meses}$$

El valor negativo resultante de la raíz cuadrada se descarta

Ejercicio resuelto A.3

Asuma que los abonos mensuales que una mujer hace a una Institución Financiera para cancelar un préstamo forman una PA. Si el quinto pago es de \$160 y el octavo pago es de \$205. ¿De cuánto será su duodécimo pago a la Financiera?

$$PA: \dots, \$160, a_6, a_7, \$205, \dots$$

Si utilizamos la fórmula del término n-ésimo con los términos conocidos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (A.2)$$

$$a_5 = a_1 + (5-1)r \quad \therefore \quad 160 = a_1 + 4r \quad (1)$$

$$a_8 = a_1 + (8-1)r \quad \therefore \quad 205 = a_1 + 7r \quad (2)$$

Restando (2) – (1):

$$205 - 160 = 7r - 4r$$

$$45 = 3r$$

$$r = 15$$

Remplazando el valor de r en la ecuación (1):

$$160 = a_1 + 4r \quad (1)$$

$$160 = a_1 + 4 * 15$$

$$a_1 = 100$$

Con datos dados y los resultados previos obtenidos, el duodécimo pago a la Financiera sería:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (A.2)$$

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r$$

$$a_{12} = 100 + 11 * 15$$

$$a_{12} = 265$$

Ejercicio resuelto A.4

Interpole 3 medios aritméticos entre 13 y 65.

$$\text{PA:} \quad 13, a_2, a_3, a_4, 65$$

Si utilizamos la fórmula del término n-ésimo con los términos conocidos, se puede encontrar la razón:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (A.2)$$

$$65 = 13 + (5 - 1)r$$

$$r = 13$$

Utilizando la definición de Progresiones Aritméticas:

$$a_1 = 13 \quad (\text{dato del problema})$$

$$a_2 = a_1 + r = 13 + 13 = 26$$

$$a_3 = a_2 + r = 26 + 13 = 39$$

$$a_4 = a_3 + r = 39 + 13 = 52$$

$$a_5 = 65 \quad (\text{dato del problema})$$

Ejercicio resuelto A.5

Interpole 4 medios aritméticos entre -10 y -35.

PA: -10, a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , -35

Si utilizamos la fórmula del término n-ésimo con los términos conocidos, se puede encontrar la razón:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (\text{A.2})$$

$$-35 = -10 + (6-1)r$$

$$r = -5$$

Utilizando la definición de Progresiones Aritméticas:

$$a_1 = -10 \quad (\text{dato del problema})$$

$$a_2 = a_1 + r = -10 - 5 = -15$$

$$a_3 = a_2 + r = -15 - 5 = -20$$

$$a_4 = a_3 + r = -20 - 5 = -25$$

$$a_5 = a_4 + r = -25 - 5 = -30$$

$$a_6 = -35 \quad (\text{dato del problema})$$

Ejercicio resuelto A.6

Un individuo solicita un préstamo de \$1020 a un amigo. El individuo se compromete en pagar la deuda con su amigo en un cierto número de pagos, cada uno de ellos menor que el anterior en \$5.

Si su cuarto pago fue de \$85, ¿cuántos pagos serán necesarios para que se cancele la deuda?

PA: P, P-5, P-10, P-15, ...

De la Progresión Aritmética anterior, tenemos que:

$$a_1 = P$$

$$a_2 = P - 5$$

$$a_3 = P - 10$$

$$a_4 = P - 15 = 85 \quad \therefore \quad P = a_1 = 100$$

Usando la fórmula del término n-ésimo:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (\text{A.2})$$

$$a_n = 100 + (n-1)(-5)$$

$$a_n = 100 - 5n + 5$$

$$a_n = 105 - 5n \quad (1)$$

Usando la fórmula de la Suma de términos:

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right)$$

$$1020 = n \left(\frac{100 + a_n}{2} \right) \quad (2)$$

Remplazando (1) en (2):

$$1020 = n \left(\frac{100 + 105 - 5n}{2} \right)$$

$$2040 = n (205 - 5n)$$

$$2040 = 205n - 5n^2$$

$$5n^2 - 205n + 2040 = 0$$

Dividiendo la ecuación anterior para 5:

$$n^2 - 41n + 408 = 0$$

$$n = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 4 * 408}}{2}$$

$$n = \frac{41 \pm 7}{2}$$

$n = 24$ Se descarta porque con 24 pagos, paga más de lo acordado.

$$n = 17$$

A.4 Aplicaciones de las Progresiones Aritméticas

Dos aplicaciones de las Progresiones Aritméticas son el cálculo:

- *del Monto en el Interés Simple.*
- *de la Depreciación por el Método de Línea recta.*

Para ilustrar estas aplicaciones considere los Ejercicios resueltos A.7 y A.8 respectivamente.

Ejercicio resuelto A.7

Juan le facilita un préstamo de \$1000 a Pedro por 7 meses con un *interés simple* mensual del 12%. ¿Cuánto dinero deberá pagar Pedro al finalizar los 7 meses?

Primer método

Usando la tabla A.3:

Mes	Capital	Interés	Monto
0	1000	-	1000
1	1000	120	1120
2	1000	120	1240
3	1000	120	1360
4	1000	120	1480
5	1000	120	1600
6	1000	120	1720
7	1000	120	1840

Tabla A.3

Segundo método

Usando la fórmula 1.7:

$$M = C (1 + n i)$$

$$M = 1000 (1 + 7 * 0,12)$$

$$M = 1840$$

Tercer método

Usando Progresiones Aritméticas

PA: 1120, 1240, 1360, ... ; $r = 120$, $a_7 = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1) r \quad (A.2)$$

$$a_7 = 1120 + (7-1) 120$$

$$a_7 = 1840$$

Ejercicio resuelto A.8

Una empresa adquiere cierta maquinaria a un valor de \$2500. El valor de esta maquinaria se *depreciará* anualmente en \$150. Si el valor de desecho (valor residual o valor de salvamento) es \$700. ¿Cuál es el tiempo de vida de la maquinaria?

Primer método

Usando la Tabla A.4

Año	Depreciación	Valor de la máquina en el año i
0	-	2500
1	150	2350
2	150	2200
3	150	2050
4	150	1900
5	150	1750
6	150	1600
7	150	1450
8	150	1300
9	150	1150
10	150	1000
11	150	850
12	150	700

Tabla A.4

Segundo método

Usando Progresiones Aritméticas:

PA: 2500, 2350, 2200, ..., 700 ; $r = -150$, $n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (\text{A.2})$$

$$700 = 2500 + (n-1)(-150)$$

$$700 = 2500 - 150n + 150$$

$$150n = 1950 \quad \therefore \quad n = 13 \text{ años}$$

A.5 Propiedades de las Progresiones Aritméticas

- En una PA con número par de términos, la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos equidistantes de los extremos.

Considere el ejemplo de la Figura A.1

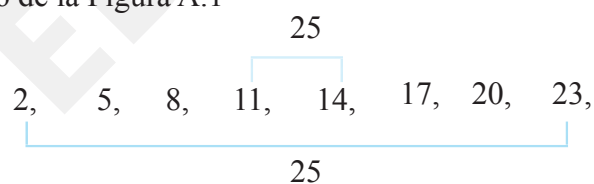


Figura A.1

- En una *PA con número impar de términos*, el término del medio equidista de los extremos y por tanto el doble del término central es igual a la suma de los extremos.

Considere el ejemplo de la Figura A.2

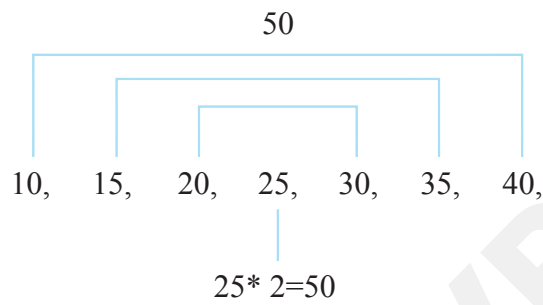


Figura A.2

Apéndice B

Progresiones Geométricas

B.1 Definición

Una Progresión Geométrica es una secuencia de números reales, una serie de números reales en los cuales cualquier número luego del primero se obtiene multiplicando (o dividiendo) una cantidad constante al anterior. A esta cantidad constante se conoce como *razón* (r).

Se presentan varios ejemplos en la Tabla B.1

Progresión Geométrica	Razón (r)
5, 10, 20, 40, 80, ...	2
2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}$
5, -15, 45, ..., -1215	-3

Tabla B.1

B.2 Tipos de Progresiones Geométricas

Las Progresiones Geométricas se las puede clasificar de la siguiente manera:

3. Dependiendo del valor de la razón

3.1 Progresión Geométrica creciente, $r > 0$

3.2 Progresión Geométrica decreciente, $0 < r < 1$

3.3 Progresión Geométrica oscilante, $r < 0$

4. Dependiendo del número de términos

4.1. Progresión Geométrica finita, si se conoce o se puede calcular el número de términos.

4.2 Progresión Geométrica infinita, si se desconoce el número de términos.

Algunos ejemplos se muestran en la Tabla B.2

Progresión Aritmética	Razón	Tipo de Progresión Geométrica
5, 10, 20, 40, 80, ...	2	PG creciente infinita
2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{64}$	$\frac{1}{2}$	PG decreciente finita
5, -15, 45, ..., -1215	-3	PG oscilante finita

Tabla B.2

B.3 Fórmulas utilizadas en Progresiones Geométricas

B.3.1 Fórmula para encontrar la razón

$$\text{Razón } (r) = \text{Término cualquiera}^* / \text{Término inmediato anterior} \quad (\text{B.1})$$

* Que no sea el primer término.

B.3.2 Dedución de la fórmula del término n-ésimo.

El término n-ésimo (a_n) representa a cualquier término de la Progresión. Generalmente en la mayoría de ejercicios se lo toma como el último término.

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 r$$

$$a_3 = a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2$$

$$a_4 = a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3$$

$$a_5 = a_4 r = (a_1 r^3) r = a_1 r^4$$

...

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (\text{B.2})$$

En la formula B.2:

a_n : término n-ésimo

a_1 : primer término

n : número de términos de la Progresión

r : razón

B.3.3 Deducción de la fórmula para la Suma de términos de una PG finita

Sea la PG: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

La suma de términos para dicha PG, podría expresarse de las siguientes formas:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Multiplicando (1) por r :

$$S_n r = a_1 r + a_2 r + a_3 r + \dots + a_{n-1} r + a_n r \quad (2)$$

Restando (2) - (1) se tendría:

$$S_n r - S_n = (a_1 r + a_2 r + a_3 r + \dots + a_{n-1} r + a_n r) - (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n)$$

$$S_n r - S_n = (a_1 r + a_2 r + a_3 r + \dots + a_{n-1} r + a_n r) - (a_1 + a_1 r + a_2 r + \dots + a_{n-2} r + a_{n-1} r)$$

$$S_n r - S_n = a_n r - a_1$$

$$S_n (r - 1) = a_n r - a_1$$

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \quad (B.3)$$

Se podría reemplazar el valor de a_n por la fórmula B.2 y obtener otra fórmula adicional para la Suma de términos de una Progresión Geométrica, esto es:

$$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} = \frac{(a_1 r^{n-1}) r - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} \quad (B.4)$$

Ejercicio resuelto B.1

Calcule la suma de los 10 primeros términos de la PG: -6, -3, -1 ½, ...

Primero se calcula la razón:

$$r = \text{Término cualquiera} / \text{Término inmediato anterior} \quad (B.1)$$

$$r = -3 / -6 = 1/2$$

Se calcula la suma de los 10 primeros términos:

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} \quad (\text{B. 4})$$

$$S_{10} = \frac{(-6) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{10} - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{10} = \frac{(-6) \left[\frac{1}{1024} - 1 \right]}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = \frac{(-6) \left[-\frac{1023}{1024} \right]}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 12 \left(-\frac{1023}{1024} \right)$$

$$S_{10} = -12$$

B.3.4 Deducción de la fórmula para la Suma de términos de una PG infinita

Si se tiene presente la fórmula de la Suma de términos de una PG finita:

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} \quad (\text{B. 4})$$

Se puede pensar que si se suman una cantidad infinita de términos, el valor de la suma de dichos términos será infinita, pero esto no ocurre si el siguiente término es cada vez más pequeño que el anterior, entonces la suma no crecerá indefinidamente sino que se acercará a un valor finito. Por tanto, para las PG infinitas se asume $|r| < 1$ y $n \rightarrow \infty$.

Recordemos que: $|r| < 1 \equiv -1 < r < 1$

Para encontrar el valor de la suma de términos de una PG infinita, se debe llevar la ecuación B.4 al límite cuando $n \rightarrow \infty$. Se tendría:

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$$

Si: $(-1 < r < 1 \text{ y } n \rightarrow \infty) \therefore r^n \rightarrow 0$

$$S_{\infty} = \frac{a_1 (-1)}{r - 1}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} \quad (\text{B.5})$$

Ejercicio resuelto B.2

Encuentre el quebrado equivalente al número decimal 0,777...

El número decimal dado puede expresarse como:

$$0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + \dots$$

$$0,777... = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{7}{10000} + \dots$$

El ejercicio se transforma en encontrar la Suma de términos de una PG infinita.

$$r = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{10}} = \frac{1}{10}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1 - r} \quad (\text{B.5})$$

$$S_{\infty} = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

$$0,777... = \frac{7}{9}$$

Ejercicio resuelto B.3

Encuentre el quebrado equivalente al número decimal 2,07555...

El número decimal dado puede expresarse como:

$$2,07555... = 2 + 0,07 + 0,005 + 0,0005 + 0,00005 + \dots$$

$$2,07555... = 2 + \frac{7}{100} + \underbrace{\frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{5}{100000} + \dots}_{\text{Suma términos de una PG infinita}} \quad (1)$$

En la Progresión Geométrica infinita indicada, se calcula la razón y luego la Suma de términos:

$$r = \frac{\frac{5}{10000}}{\frac{5}{1000}} = \frac{1}{10}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} \quad (\text{B.5})$$

$$S_{\infty} = \frac{\frac{5}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{5}{1000}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{900} = \frac{1}{180}$$

Remplazando el valor de la Suma de los términos de la PG infinita en la ecuación (1):

$$2,07555 \dots = 2 + \frac{7}{100} + \frac{1}{180}$$

$$2,07555 \dots = \frac{467}{225}$$

B.3.5 Dedución de la fórmula para el Producto de términos de una PG finita

Sea la PG: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

El Producto de términos para dicha PG, podría expresarse de las siguientes formas:

$$P_n = a_1 * a_2 * a_3 * \dots * a_{n-1} * a_n \quad (1)$$

Utilizando la propiedad conmutativa, la expresión anterior puede escribirse también así:

$$P_n = a_n * a_{n-1} * a_{n-2} * \dots * a_2 * a_1 \quad (2)$$

Si multiplicamos (1)*(2):

$$P_n^2 = (a_1 * a_n) * (a_2 * a_{n-1}) * (a_3 * a_{n-2}) * \dots * (a_{n-1} * a_2) * (a_n * a_1)$$

Los productos entre paréntesis son iguales y equivalen a $a_1 * a_n$ (ver sección B.5 Propiedades de las Progresiones Geométricas), por ende:

$$P_n^2 = (a_1 * a_n)^n$$

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \quad (\text{B.6})$$

Ejercicio resuelto B.4

Dada la PG: $1/25, 1/5, 1, 5, 25, 125, 625$. Encuentre el producto de los términos de dicha PG.

$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n} \quad (\text{B.6})$$

$$P_n = \sqrt{\left(\frac{1}{25} * 625\right)^7}$$

$$P_n = 78125$$

Ejercicio resuelto B.5

Interpole 4 medios geométricos entre $4 \frac{1}{2}$ y $16/27$.

$$\text{PA:} \quad 4 \frac{1}{2}, a_2, a_3, a_4, a_5, 16/27$$

$$9/2, a_2, a_3, a_4, a_5, 16/27$$

Si utilizamos la fórmula del término n-ésimo con los términos conocidos, se puede encontrar la razón:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{16}{27} = \frac{9}{2} r^{6-1}$$

$$\frac{16}{27} = \frac{9}{2} r^5$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{\frac{16}{27}}{\frac{9}{2}}}$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{32}{243}}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Utilizando la definición de Progresiones Geométricas:

$$a_1 = \frac{9}{2} \quad (\text{dato del problema})$$

$$a_2 = a_1 r = \left(\frac{9}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = 3$$

$$a_3 = a_2 r = (3) \left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$a_4 = a_3 r = (2) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$a_5 = a_4 r = \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$a_6 = \frac{16}{27} \quad (\text{dato del problema})$$

B.4 Aplicaciones de las Progresiones Geométricas

Dos aplicaciones de las Progresiones Geométricas son el cálculo:

- del Monto (Valor Futuro) en el Interés Compuesto.
- de la Depreciación por el Método de las Tasas (Porcentajes) Fijas.

Para ilustrar estas aplicaciones considere los Ejercicios resueltos B.6 y B.7 respectivamente.

Ejercicio resuelto B.6

Juan le facilita un préstamo de \$1000 a Pedro por 7 meses con un *interés compuesto* mensual del 12%. ¿ Cuánto dinero deberá pagar Pedro al finalizar los 7 meses ?

Primer método

Usando la tabla B.3

Mes	Capital	Interés	Monto
0	1000	-	1000
1	1000	120	1120
2	1120	134,4	1254,4
3	1254,4	150,5	1404,9
4	1404,9	168,6	1573,5
5	1573,5	188,8	1762,3
6	1762,3	211,5	1973,8
7	1973,8	236,8	2210,6

Tabla B.3

Segundo método

Usando la fórmula 3.1:

$$F = P (1 + i)^n$$

$$F = 1000 (1 + 0,12)^7$$

$$F = 2210,6$$

Tercer método

Usando Progresiones Geométricas

PG: 1120, 1254.4, 1404.9, ... ; $r = 1.12$, $a_7 = ?$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (\text{B.2})$$

$$a_7 = 1120 * (1.12)^{7-1}$$

$$a_7 = 1120 * (1.12)^6$$

$$a_7 = 2210.6$$

Ejercicio resuelto B.7

Una empresa adquiere cierta maquinaria a un valor de \$5000. El valor de esta maquinaria se *depreciará* anualmente a una tasa del 10%. Determine su valor contable al final del séptimo año.

Primer método

Usando la Tabla B.4

Año	Depreciación 10%	Valor de la máquina en el año i
0	-	5000
1	500	4500
2	450	4050
3	405	3645
4	364,5	3280,5
5	328	2952,5
6	295,3	2657,2
7	265,7	2391,5

Tabla B.4

Segundo método

Usando Progresiones Geométricas:

PG: 4500, 4050, 3645, ... ; $r = 0.9$, $a_7 = ?$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (\text{B.2})$$

$$a_7 = 4500 * 0,9^{7-1}$$

$$a_7 = 4500 * 0,9^6$$

$$a_7 = 2391,5$$

B.5 Propiedades de las Progresiones Geométricas

- En una *PG con número par de términos*, el producto de 2 términos equidistantes de los extremos es igual al producto de los extremos.

Considere el ejemplo de la Figura B.1

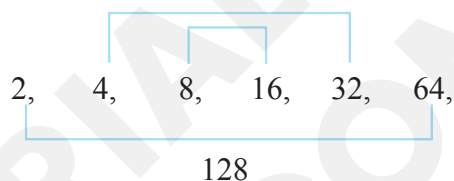


Figura B.1

- En una *PG con número impar de términos*, el término del medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

Considere el ejemplo de la Figura B.2

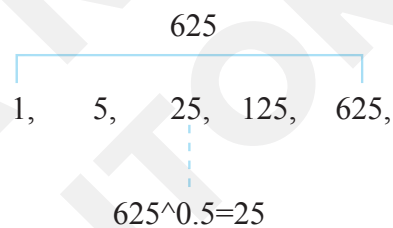


Figura B.2

Apéndice C

C.1 Definición de logaritmo

Se presenta a continuación algunas definiciones:

1. Se puede definir un logaritmo como el exponente al que hay que elevar una base para obtener un número.
2. Es otra forma o una alternativa para expresar una potencia. Ver tabla C.1

Forma exponencial	Forma logarítmica
$3^2 = 9$	$\log_3 9 = 2$
$2^4 = 16$	$\log_2 16 = 4$
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
$5^3 = 125$	$\log_5 125 = 3$

Tabla C.1

3. Matemáticamente:

$$(b^x = N \therefore \log_b N = x); b > 0 \wedge b \neq 1$$

Como base de un logaritmo se pueden usar muchos números pero los más usados son la base 10 y la base e.

Cuando se usa como base el 10, base decimal, generalmente no se lo coloca en el logaritmo. Ejemplo: $\log_{10} 5 = \log 5$.

Cuando se usa como base e ($e = 2,718281828\dots$), base natural o neperiana, el logaritmo se simboliza con ln. Ejemplo: $\log_{2,7182\dots} 3 = \log_e 3 = \ln 3$.

El número e se obtiene de un límite que es tema de estudio en Cálculo diferencial.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828\dots$$

Ejercicio resuelto C.1

Usando la definición de logaritmo, encontrar el valor de: $\log_{0,0001} 100 = ?$

$$\log_{0,0001} 100 = x$$

$$0,0001^x = 100$$

$$10^{-4x} = 100$$

$$10^{-4x} = 10^2$$

Como las bases son iguales, los exponentes deben ser también iguales:

$$4x = 2$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Ejercicio resuelto C.2

Usando la definición de logaritmo, encontrar el valor de:

$$\frac{\log_{243} 3 + \log_4 16}{\log_{625} 25 + \log_{2/3}(27/8)} = ?$$

$\log_{243} 3 = x$	$\log_4 16 = y$	$\log_{625} 25 = z$	$\log_{2/3}(27/8) = w$
$243^x = 3$	$4^y = 16$	$625^z = 25$	$\left(\frac{2}{3}\right)^w = \frac{27}{8}$
$3^{5x} = 3$	$4^y = 4^2$	$5^{4z} = 5^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^w = \left(\frac{3}{2}\right)^3$
$5x = 1$	$y = 2$	$4z = 2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^w = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$
$x = 1/5$		$z = 1/2$	$w = -3$

$$\frac{\log_{243} 3 + \log_4 16}{\log_{625} 25 + \log_{2/3}(27/8)} = \frac{\frac{1}{5} + 2}{\frac{1}{2} - 3} = -\frac{22}{25}$$

C.2 Propiedades de los logaritmos

1. No existe el logaritmo de cero ni de números negativos. Así: $\log_2 0 = ?$, $\log_2 (-8) = ?$
 $\log_2 0$ podría ser un valor negativo muy pequeño, pero no hay un solo valor sino varios valores que pueden hacer que $2^?$ tienda a 0

2. El logaritmo en cualquier base de la unidad es cero. Ejemplos:

$$\log_3 1 = 0 \quad \text{porque} \quad 3^0 = 1$$

$$\log_{0,5} 1 = 0 \quad \text{porque} \quad 0,5^0 = 1$$

3. En cualquier base, el logaritmo de la base es la unidad. Ejemplos:

$$\log_3 3 = 1 \quad \text{porque} \quad 3^1 = 3$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \text{porque} \quad 10^1 = 10$$

$$\ln e = 1 \quad \text{porque} \quad e^1 = e$$

$$\log_\pi \pi = 1 \quad \text{porque} \quad \pi^1 = \pi$$

4. La base de un logaritmo siempre es positiva y distinta de uno.

Si la base fuera negativa: $\log_{-3}(-9) = ?$, pues $(-3)^2 \neq -9$ y $(-3)^{-2} \neq -9$ por tanto ese logaritmo no existe.

Si la base fuese cero: $\log_0 3 = ?$, pues $0^? = 3$, por tanto ese logaritmo no existe.

5. La unidad no puede ser base de ningún logaritmo.

Si la base fuese uno: $\log_1 3 = ?$, pues $1^? = 3$, por tanto ese logaritmo no existe.

6. Los números que son potencias exactas de la base tienen como logaritmo un número entero y los que no son potencias exactas de la base tienen como logaritmo un número compuesto de una parte entera y una parte decimal. A la parte entera se le llama *característica* y a la parte decimal se llama *mantisa*.

Ejemplos de logaritmos de números que son potencias exactas de la base:

$$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Ejemplos de logaritmos de números que no son potencias exactas de la base:

$$\log 5 = \overset{\text{característica}}{\hat{0}}, \underbrace{69897}_{\text{mantisa}}$$

$$\log 200 = \overset{\text{característica}}{\hat{2}}, \underbrace{3010}_{\text{mantisa}}$$

Matemáticamente esta propiedad se la podría interpretar de la siguiente manera:

$$N = a * 10^c ; a \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{Z}$$

Si extraemos el logaritmo a cada miembro de la ecuación anterior y usando la propiedad del logaritmo de un producto y del logaritmo de una potencia:

$$\log N = \log a + \log 10^c$$

$$\log N = \log a + c$$

$$\log N = \overset{\text{característica}}{\hat{c}} + \underbrace{\log a}_{\text{mantisa}}$$

$$7. \quad b^{\log_b N} = N$$

Demostración:

$$\text{Sea } x = \log_b N$$

Por la definición de logaritmo:

$$b^x = N$$

$$b^{\log_b N} = N$$

$$8. \text{ Logaritmo de una potencia: } \log_b A^n = n \log_b A; \quad n \in \mathbb{R} \quad A > 0$$

Ejemplos:

$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \log_3 3 = 4$$

$$\log_4 25 = \log_4 5^2 = 2 \log_4 5$$

$$\log_2 \sqrt{16} = \log_2 64^{1/2} = \log_2 (2^6)^{1/2} = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3$$

Demostración:

$$\text{Sea } \log_b A = x \quad (1) \quad \therefore \quad b^x = A \quad (2)$$

Elevando ambos miembros de la ecuación (2) a la n:

$$(b^x)^n = A^n$$

$$b^{x \cdot n} = A^n$$

Usando la definición de logaritmos:

$$\log_b A^n = x \cdot n$$

$$\log_b A^n = n \cdot x$$

Remplazando el valor de x por (1):

$$\log_b A^n = n \log_b A$$

$$9. \text{ Logaritmo de un producto: } \log_b A B = \log_b A + \log_b B$$

Nota:

No existe el logaritmo ni de suma ni de resta, esto es: $\log(A+B) \neq (\log A + \log B)$

Ejemplo:

$$\log_4 (16 * 64) = \log_4 16 + \log_4 64 = \log_4 4^2 + \log_4 4^3 = 2 + 3 = 5$$

Demostración:

$$\text{Sean } \log_b A = x \quad (1) \quad \therefore \quad b^x = A \quad (3)$$

$$\log_b B = y \quad (2) \quad \therefore \quad b^y = B \quad (4)$$

Multiplicando (3) y (4):

$$b^x b^y = A B$$

$$b^{x+y} = A B$$

Si obtenemos el logaritmo en base b a ambos miembros:

$$\log_b b^{x+y} = \log_b A B$$

$$x + y = \log_b A B$$

Remplazando x y y por (1) y (2):

$$\log_b A + \log_b B = \log_b A B$$

$$\log_b A B = \log_b A + \log_b B$$

10. Logaritmo de un cociente:

$$\log_b \left(\frac{A}{B} \right) = \log_b A - \log_b B$$

Nota:

$$\log \left(\frac{A}{B} \right) \neq \frac{\log A}{\log B}$$

Ejemplo:

$$\log_4 \left(\frac{256}{4} \right) = \log_4 256 - \log_4 4 = \log_4 4^4 - \log_4 4 = 4 - 1 = 3$$

Demostración:

$$\text{Sean} \quad \log_b A = x \quad (1) \quad \therefore \quad b^x = A \quad (3)$$

$$\log_b B = y \quad (2) \quad \therefore \quad b^y = B \quad (4)$$

Dividiendo (3) para (4):

$$\frac{b^x}{b^y} = \frac{A}{B}$$

$$b^{x-y} = \frac{A}{B}$$

Si obtenemos el logaritmo en base b a ambos miembros:

$$\log_b b^{x-y} = \log_b \left(\frac{A}{B}\right)$$

$$x - y = \log_b \left(\frac{A}{B}\right)$$

Remplazando x y y por (1) y (2):

$$\log_b A - \log_b B = \log_b \left(\frac{A}{B}\right)$$

$$\log_b \left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$$

Propiedad del cambio de base

$$\log_{b_1} N = \frac{\log_{b_2} N}{\log_{b_2} b_1}$$

Ejemplos:

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3}$$

$$\log_4 \pi = \frac{\ln \pi}{\ln 4}$$

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

Demostración:

$$\text{Sea } y = \log_{b_1} N \quad (1) \quad \therefore \quad b_1^y = N \quad (2)$$

Si obtenemos el logaritmo en base b2 a ambos miembros de la ecuación (2):

$$\log_{b_2} b_1^y = \log_{b_2} N$$

Usando la propiedad del logaritmo de una potencia:

$$y \log_{b_2} b_1 = \log_{b_2} N$$

$$y = \frac{\log_{b_2} N}{\log_{b_2} b_1}$$

Remplazando y por la ecuación (1):

$$\log_{b_1} N = \frac{\log_{b_2} N}{\log_{b_2} b_1}$$

C.3 Aplicaciones de los logaritmos

Las aplicaciones más frecuentes de los logaritmos son:

- Despejar incógnitas que están como exponentes de una ecuación (ecuaciones exponenciales).
- Para medir el Potencial de Hidrógeno PH (acidez de una sustancia)
 $PH = -\log [H^+]$; $[H^+]$: concentración de iones hidrógeno.
- Se usan en escalas para medir la intensidad de temblores y terremotos, entre otras

A continuación puede revisar los ejercicios resueltos C.3 y C.4 que ilustran la primera aplicación.

Ejercicio resuelto C.3

Peter invierte \$ 50000 en una Institución Financiera que le paga un interés compuesto anual del 15%. Durante cuánto tiempo (años, meses y días) debe permanecer el dinero invertido para llegar a retirar \$ 400000

$$F = P (1+i)^n \quad (3.1)$$

$$400000 = 50000 (1 + 0,15)^n$$

$$8 = 1,15^n$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_{1,15} 8 = n$$

$$n = \log_{1,15} 8$$

Aplicando la propiedad del cambio de base:

$$n = (\log 8) / (\log 1,15)$$

$$n = 14,87848 \text{ años} \quad \rightarrow \quad 14 \text{ años}$$

$$? \text{ meses} = 0,87848 \text{ años} * \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ año}}$$

$$? \text{ meses} = 10,54176 \text{ meses} \quad \rightarrow \quad 10 \text{ meses}$$

$$? \text{ días} = 0,54176 \text{ meses} * \frac{30 \text{ días}}{1 \text{ mes}}$$

$$? \text{ días} = 16,2528 \text{ días} \quad \rightarrow \quad 16 \text{ días}$$

El dinero debe permanecer invertido durante 14 años, 10 meses, 16 días.

Ejercicio resuelto C.4

Siendo,

$$C = 10 * 0,8^t; \quad C \text{ [mg]}, \quad t \text{ [horas]}$$

C: cantidad de medicamento que queda en el cuerpo de una persona en mg. luego de t horas suministrado.

Encuentre luego de cuánto tiempo de suministrado un medicamento tendría un jugador en su organismo 5 mg de dicha sustancia.

Nota:

Lo permitido en una prueba de doping es 2 mg.

$$C = 10 * 0,8^t$$

$$5 = 10 * 0,8^t$$

$$0,5 = 0,8^t$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$t = \log_{0,8} 0,5$$

Aplicando la propiedad del cambio de base:

$$t = (\log 0,5) / \log (0,8)$$

$$t = 3,10628 \text{ horas} \quad \rightarrow \quad 3 \text{ horas}$$

$$? \text{ minutos} = 0,10628 \text{ horas} * \frac{60 \text{ minutos}}{1 \text{ hora}}$$

$$? \text{ minutos} = 6,3768 \text{ minutos} \quad \rightarrow \quad 6 \text{ minutos}$$

C.4 Antilogaritmo

El antilogaritmo se define matemáticamente como:

$$\text{antilog}_b N = b^N; \quad b > 0 \wedge b \neq 1, \quad N \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \quad \therefore \quad \text{antilog}_2 3 = 8$$

$$\log_{10} 2 = 0,30103 \quad \therefore \quad \text{antilog}_{10} 0,30103 = 2$$

$$\text{antilog}_4 0 = 1$$

$$\text{antilog}_{\frac{1}{2}} (-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

C.4.1 Propiedades del antilogaritmo

1. $\text{antilog}_b (\log_b N) = N$

Ejemplo:

$$\text{antilog}_6 (\log_6 4) = 4$$

Demostración:

$$\text{antilog}_b (\log_b N) = N$$

Aplicando la definición de antilogaritmo:

$$b^{\log_b N} = N$$

2. $\log_b (\text{antilog}_b N) = N$

Ejemplo:

$$\log_2 (\text{antilog}_2 5) = 5$$

Demostración:

$$\log_b (\text{antilog}_b N) = N$$

Aplicando la definición de antilogaritmo:

$$\log_b b^N = N$$

C.5 Cologaritmo

El cologaritmo se define matemáticamente como:

$$\text{colog}_b N = \log_b \left(\frac{1}{N} \right) = -\log_b N$$

Ejemplos:

$$\text{colog}_{10} 200 = -\log_{10} 200 = -2,3010$$

$$\text{colog}_5 25 = -\log_5 25 = -2$$

$$\text{colog}_6 216 = -\log_6 216 = -\log_6 6^3 = -3$$

$$\text{colog}_3 \left(\frac{1}{27} \right) = -\log_3 \left(\frac{1}{27} \right) = -\log_3 (3^{-3}) = 3$$

$$\text{colog } 3 + \log 3 = -\log 3 + \log 3 = 0$$

$$\text{colog}_2 4^{-3} = -\log_2 4^{-3} = -\log_2 (2^2)^{-3} = -\log_2 2^{-6} = 6$$

Apéndice D

Tabla para encontrar el número de días entre 2 fechas dadas

Día	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Día
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28
29	29	*	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30
31	31		90		151		212	243		304		365	31

* Esta Tabla permite calcular *directamente* el número de días entre 2 fechas de un mismo año *si el año NO es bisiesto*. Si el año es bisiesto, al tener febrero 29 días, a partir del 1ro de marzo al número que acompaña a cada día de la presente Tabla hay que sumarle 1.

Apéndice E

Fórmulas usadas en Matemáticas Financieras

Logaritmos	Progresiones Aritméticas	Progresiones Geométricas
<ul style="list-style-type: none"> Definición $(b^x = N \equiv \log_b N = x); b > 0 \wedge b \neq 1$ 	<ul style="list-style-type: none"> Razón $R = T_{no\ cualesquiera} (q'no\ sea\ el\ 1ro) - T_{no\ anterior}$ Término n-ésimo $a_n = a_1 + (n - 1) * R$ Suma de los 1eros n términos de una PA finita $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$ 	<ul style="list-style-type: none"> Razón $R = \frac{T_{no\ cualquiera} (q'no\ sea\ el\ 1ro)}{T_{no\ inmediato\ anterior}}$ Término nésimo $a_n = a_1 * R^{n-1}$ Suma de los n 1eros términos de una PG finita $S_n = \frac{a_n R - a_1}{R - 1}$ $S_n = \frac{a_1 (R^n - 1)}{R - 1}$ Suma de términos de una PG infinita $S_\infty = \frac{a_1}{1 - R}$ Producto de los n 1eros términos de una PG finita $P = \sqrt{(a_1 * a_n)^n}$

Interés Simple	Interés Compuesto
Para ejercicios varios	Para ejercicios varios
$M = C + I$	Capitalización Periódica
$I = C * n * i$	$F = P(1 + i)^n$
$I = \frac{C * T * t}{100}$	$F = P \left(1 + \frac{i}{p}\right)^{mp}$
$I = \frac{C * T * t}{1200}$	Capitalización Continua
$I = \frac{C * T * t}{36000}$	$F = Pe^{in}; e = 2,718281828 \dots$
$M = C(1 + n * i)$	Conversiones de tasas de interés
Descuento simple real	Capitalización periódica
$D = M - C'$	$\%e = \left[\left(1 + \frac{\%n}{100 * p}\right)^p - 1\right] * 100$
$M = C'(1 + n' * d)$	Capitalización continua
Descuento comercial	$\%e = (e^{\%n/100} - 1) * 100$
$D = M - C'$	Descuento Compuesto
$D = M * n' * d$	$M = C' (1 + d)^{n'}$
$C' = M(1 - n' * d)$	$M = C(1 + ni);$ si el problema menciona interés simple
$M = C(1 + n * i)$	$M = C(1 + i)^n;$ si el problema menciona interés compuesto

Interés Compuesto: Anualidades Ordinarias	Interés Compuesto: Anualidades Anticipadas
$P = A(P/A, i\%, n)$ $P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$ ó $P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$	$P = A [(P/A, i\%, n - 1) + 1]$ $P = A \left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i(1+i)^{n-1}} + 1 \right]$
$A = P(A/P, i\%, n)$ $A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$ ó $A = P \left[\frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} \right]$	
$F = A(F/A, i\%, n)$ $F = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$	$F = A [(F/A, i\%, n + 1) - 1]$ $F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$
$A = F(A/F, i\%, n)$ $A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$	

Interés Compuesto: Anualidades Diferidas	Interés Compuesto: Perpetuidades
$P = A(P/A, i\%, n)(P/F, i\%, k)$ $P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] (1+i)^{-k}$ ó $P = A \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^{-k}$	<ul style="list-style-type: none"> Renta Perpetua Ordinaria $P = \frac{A}{i}$ Renta Perpetua Anticipada $P = A + \frac{A}{i}$ Renta Perpetua Diferida $P = \frac{A}{i} (1+i)^{-k}$ Renta Perpetua que ocurre cada cierto número de periodos $P = \frac{R}{i} (A/F, i\%, k)$

Interés Compuesto: Gradiente Uniforme Convencional sin pago base	Amortización Gradual
Gradiente Aritmético	
<p>Gradiente Aritmético = $\frac{\text{Incremento ó Decremento}}{n-1}$</p> <p>$P = G (P/G, i \%, n)$</p> <p>$P = G \left[\frac{1}{i} \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n} \right) \right]$</p> <p>$A = G (A/G, i \%, n)$</p> <p>$A = G \left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1} \right]$</p> <p>$F = G (F/G, i \%, n)$</p> <p>$F = G \left[\frac{1}{i} \left(\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n \right) \right]$</p>	<p>$C = R \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$</p>
Interés Compuesto: Serie Geométrica o escalonada Gradiente Geométrico	Amortización Constante
<p>Si $t \neq i$: $P_E = B * \frac{\left[\frac{(1+t)^n}{(1+i)^n} - 1 \right]}{t - i}$</p> <p>Si $t = i$: $P_E = B \left(\frac{n}{1+t} \right)$</p>	<p>$R = C \left[\frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \right]$</p>

Apéndice F

Tablas de Factores de Interés Compuesto

Factores de Interés Compuesto								
0,50%						0,50%		
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0050	0,9950	1,0000	1,00000	0,9950	1,00500		
2	1,0100	0,9901	2,0050	0,49875	1,9851	0,50375	0,9901	0,4988
3	1,0151	0,9851	3,0150	0,33167	2,9702	0,33667	2,9604	0,9967
4	1,0202	0,9802	4,0301	0,24813	3,9505	0,25313	5,9011	1,4938
5	1,0253	0,9754	5,0503	0,19801	4,9259	0,20301	9,8026	1,9900
6	1,0304	0,9705	6,0755	0,16460	5,8964	0,16960	14,6552	2,4855
7	1,0355	0,9657	7,1059	0,14073	6,8621	0,14573	20,4493	2,9801
8	1,0407	0,9609	8,1414	0,12283	7,8230	0,12783	27,1755	3,4738
9	1,0459	0,9561	9,1821	0,10891	8,7791	0,11391	34,8244	3,9668
10	1,0511	0,9513	10,2280	0,09777	9,7304	0,10277	43,3865	4,4589
11	1,0564	0,9466	11,2792	0,08866	10,6770	0,09366	52,8526	4,9501
12	1,0617	0,9419	12,3356	0,08107	11,6189	0,08607	63,2136	5,4406
13	1,0670	0,9372	13,3972	0,07464	12,5562	0,07964	74,4602	5,9302
14	1,0723	0,9326	14,4642	0,06914	13,4887	0,07414	86,5835	6,4190
15	1,0777	0,9279	15,5365	0,06436	14,4166	0,06936	99,5743	6,9069
16	1,0831	0,9233	16,6142	0,06019	15,3399	0,06519	113,4238	7,3940
17	1,0885	0,9187	17,6973	0,05651	16,2586	0,06151	128,1231	7,8803
18	1,0939	0,9141	18,7858	0,05323	17,1728	0,05823	143,6634	8,3658
19	1,0994	0,9096	19,8797	0,05030	18,0824	0,05530	160,0360	8,8504
20	1,1049	0,9051	20,9791	0,04767	18,9874	0,05267	177,2322	9,3342
21	1,1104	0,9006	22,0840	0,04528	19,8880	0,05028	195,2434	9,8172
22	1,1160	0,8961	23,1944	0,04311	20,7841	0,04811	214,0611	10,2993
23	1,1216	0,8916	24,3104	0,04113	21,6757	0,04613	233,6768	10,7806
24	1,1272	0,8872	25,4320	0,03932	22,5629	0,04432	254,0820	11,2611
25	1,1328	0,8828	26,5591	0,03765	23,4456	0,04265	275,2686	11,7407
26	1,1385	0,8784	27,6919	0,03611	24,3240	0,04111	297,2281	12,2195
27	1,1442	0,8740	28,8304	0,03469	25,1980	0,03969	319,9523	12,6975
28	1,1499	0,8697	29,9745	0,03336	26,0677	0,03836	343,4332	13,1747
29	1,1556	0,8653	31,1244	0,03213	26,9330	0,03713	367,6625	13,6510
30	1,1614	0,8610	32,2800	0,03098	27,7941	0,03598	392,6324	14,1265
36	1,1967	0,8356	39,3361	0,02542	32,8710	0,03042	557,5598	16,9621
40	1,2208	0,8191	44,1588	0,02265	36,1722	0,02765	681,3347	18,8359
48	1,2705	0,7871	54,0978	0,01849	42,5803	0,02349	959,9188	22,5437
50	1,2832	0,7793	56,6452	0,01765	44,1428	0,02265	1035,6966	23,4624
55	1,3156	0,7601	63,1258	0,01584	47,9814	0,02084	1235,2686	25,7447
60	1,3489	0,7414	69,7700	0,01433	51,7256	0,01933	1448,6458	28,0064
65	1,3829	0,7231	76,5821	0,01306	55,3775	0,01806	1675,0272	30,2475
70	1,4178	0,7053	83,5661	0,01197	58,9394	0,01697	1913,6427	32,4680
75	1,4536	0,6879	90,7265	0,01102	62,4136	0,01602	2163,7525	34,6679
80	1,4903	0,6710	98,0677	0,01020	65,8023	0,01520	2424,6455	36,8474
85	1,5280	0,6545	105,5943	0,00947	69,1075	0,01447	2695,6389	39,0065

Factores de Interés Compuesto

1,00%							1,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0100	0,9901	1,0000	1,00000	0,9901	1,01000		
2	1,0201	0,9803	2,0100	0,49751	1,9704	0,50751	0,9803	0,4975
3	1,0303	0,9706	3,0301	0,33002	2,9410	0,34002	2,9215	0,9934
4	1,0406	0,9610	4,0604	0,24628	3,9020	0,25628	5,8044	1,4876
5	1,0510	0,9515	5,1010	0,19604	4,8534	0,20604	9,6103	1,9801
6	1,0615	0,9420	6,1520	0,16255	5,7955	0,17255	14,3205	2,4710
7	1,0721	0,9327	7,2135	0,13863	6,7282	0,14863	19,9168	2,9602
8	1,0829	0,9235	8,2857	0,12069	7,6517	0,13069	26,3812	3,4478
9	1,0937	0,9143	9,3685	0,10674	8,5660	0,11674	33,6959	3,9337
10	1,1046	0,9053	10,4622	0,09558	9,4713	0,10558	41,8435	4,4179
11	1,1157	0,8963	11,5668	0,08645	10,3676	0,09645	50,8067	4,9005
12	1,1268	0,8874	12,6825	0,07885	11,2551	0,08885	60,5687	5,3815
13	1,1381	0,8787	13,8093	0,07241	12,1337	0,08241	71,1126	5,8607
14	1,1495	0,8700	14,9474	0,06690	13,0037	0,07690	82,4221	6,3384
15	1,1610	0,8613	16,0969	0,06212	13,8651	0,07212	94,4810	6,8143
16	1,1726	0,8528	17,2579	0,05794	14,7179	0,06794	107,2734	7,2886
17	1,1843	0,8444	18,4304	0,05426	15,5623	0,06426	120,7834	7,7613
18	1,1961	0,8360	19,6147	0,05098	16,3983	0,06098	134,9957	8,2323
19	1,2081	0,8277	20,8109	0,04805	17,2260	0,05805	149,8950	8,7017
20	1,2202	0,8195	22,0190	0,04542	18,0456	0,05542	165,4664	9,1694
21	1,2324	0,8114	23,2392	0,04303	18,8570	0,05303	181,6950	9,6354
22	1,2447	0,8034	24,4716	0,04086	19,6604	0,05086	198,5663	10,0998
23	1,2572	0,7954	25,7163	0,03889	20,4558	0,04889	216,0660	10,5626
24	1,2697	0,7876	26,9735	0,03707	21,2434	0,04707	234,1800	11,0237
25	1,2824	0,7798	28,2432	0,03541	22,0232	0,04541	252,8945	11,4831
26	1,2953	0,7720	29,5256	0,03387	22,7952	0,04387	272,1957	11,9409
27	1,3082	0,7644	30,8209	0,03245	23,5596	0,04245	292,0702	12,3971
28	1,3213	0,7568	32,1291	0,03112	24,3164	0,04112	312,5047	12,8516
29	1,3345	0,7493	33,4504	0,02990	25,0658	0,03990	333,4863	13,3044
30	1,3478	0,7419	34,7849	0,02875	25,8077	0,03875	355,0021	13,7557
36	1,4308	0,6989	43,0769	0,02321	30,1075	0,03321	494,6207	16,4285
40	1,4889	0,6717	48,8864	0,02046	32,8347	0,03046	596,8561	18,1776
48	1,6122	0,6203	61,2226	0,01633	37,9740	0,02633	820,1460	21,5976
50	1,6446	0,6080	64,4632	0,01551	39,1961	0,02551	879,4176	22,4363
55	1,7285	0,5785	72,8525	0,01373	42,1472	0,02373	1032,8148	24,5049
60	1,8167	0,5504	81,6697	0,01224	44,9550	0,02224	1192,8061	26,5333
65	1,9094	0,5237	90,9366	0,01100	47,6266	0,02100	1358,3903	28,5217
70	2,0068	0,4983	100,6763	0,00993	50,1685	0,01993	1528,6474	30,4703
75	2,1091	0,4741	110,9128	0,00902	52,5871	0,01902	1702,7340	32,3793
80	2,2167	0,4511	121,6715	0,00822	54,8882	0,01822	1879,8771	34,2492
85	2,3298	0,4292	132,9790	0,00752	57,0777	0,01752	2059,3701	36,0801

Factores de Interés Compuesto								
1,50%								1,50%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0150	0,9852	1,0000	1,00000	0,9852	1,01500		
2	1,0302	0,9707	2,0150	0,49628	1,9559	0,51128	0,9707	0,4963
3	1,0457	0,9563	3,0452	0,32838	2,9122	0,34338	2,8833	0,9901
4	1,0614	0,9422	4,0909	0,24444	3,8544	0,25944	5,7098	1,4814
5	1,0773	0,9283	5,1523	0,19409	4,7826	0,20909	9,4229	1,9702
6	1,0934	0,9145	6,2296	0,16053	5,6972	0,17553	13,9956	2,4566
7	1,1098	0,9010	7,3230	0,13656	6,5982	0,15156	19,4018	2,9405
8	1,1265	0,8877	8,4328	0,11858	7,4859	0,13358	25,6157	3,4219
9	1,1434	0,8746	9,5593	0,10461	8,3605	0,11961	32,6125	3,9008
10	1,1605	0,8617	10,7027	0,09343	9,2222	0,10843	40,3675	4,3772
11	1,1779	0,8489	11,8633	0,08429	10,0711	0,09929	48,8568	4,8512
12	1,1956	0,8364	13,0412	0,07668	10,9075	0,09168	58,0571	5,3227
13	1,2136	0,8240	14,2368	0,07024	11,7315	0,08524	67,9454	5,7917
14	1,2318	0,8118	15,4504	0,06472	12,5434	0,07972	78,4994	6,2582
15	1,2502	0,7999	16,6821	0,05994	13,3432	0,07494	89,6974	6,7223
16	1,2690	0,7880	17,9324	0,05577	14,1313	0,07077	101,5178	7,1839
17	1,2880	0,7764	19,2014	0,05208	14,9076	0,06708	113,9400	7,6431
18	1,3073	0,7649	20,4894	0,04881	15,6726	0,06381	126,9435	8,0997
19	1,3270	0,7536	21,7967	0,04588	16,4262	0,06088	140,5084	8,5539
20	1,3469	0,7425	23,1237	0,04325	17,1686	0,05825	154,6154	9,0057
21	1,3671	0,7315	24,4705	0,04087	17,9001	0,05587	169,2453	9,4550
22	1,3876	0,7207	25,8376	0,03870	18,6208	0,05370	184,3798	9,9018
23	1,4084	0,7100	27,2251	0,03673	19,3309	0,05173	200,0006	10,3462
24	1,4295	0,6995	28,6335	0,03492	20,0304	0,04992	216,0901	10,7881
25	1,4509	0,6892	30,0630	0,03326	20,7196	0,04826	232,6310	11,2276
26	1,4727	0,6790	31,5140	0,03173	21,3986	0,04673	249,6065	11,6646
27	1,4948	0,6690	32,9867	0,03032	22,0676	0,04532	267,0002	12,0992
28	1,5172	0,6591	34,4815	0,02900	22,7267	0,04400	284,7958	12,5313
29	1,5400	0,6494	35,9987	0,02778	23,3761	0,04278	302,9779	12,9610
30	1,5631	0,6398	37,5387	0,02664	24,0158	0,04164	321,5310	13,3883
36	1,7091	0,5851	47,2760	0,02115	27,6607	0,03615	439,8303	15,9009
40	1,8140	0,5513	54,2679	0,01843	29,9158	0,03343	524,3568	17,5277
48	2,0435	0,4894	69,5652	0,01437	34,0426	0,02937	703,5462	20,6667
50	2,1052	0,4750	73,6828	0,01357	34,9997	0,02857	749,9636	21,4277
55	2,2679	0,4409	84,5296	0,01183	37,2715	0,02683	868,0285	23,2894
60	2,4432	0,4093	96,2147	0,01039	39,3803	0,02539	988,1674	25,0930
65	2,6320	0,3799	108,8028	0,00919	41,3378	0,02419	1109,4752	26,8393
70	2,8355	0,3527	122,3638	0,00817	43,1549	0,02317	1231,1658	28,5290
75	3,0546	0,3274	136,9728	0,00730	44,8416	0,02230	1352,5600	30,1631
80	3,2907	0,3039	152,7109	0,00655	46,4073	0,02155	1473,0741	31,7423
85	3,5450	0,2821	169,6652	0,00589	47,8607	0,02089	1592,2095	33,2676

Factores de Interés Compuesto

2,00%								2,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,0200	0,9804	1,0000	1,00000	0,9804	1,02000			
2	1,0404	0,9612	2,0200	0,49505	1,9416	0,51505	0,9612	0,4950	
3	1,0612	0,9423	3,0604	0,32675	2,8839	0,34675	2,8458	0,9868	
4	1,0824	0,9238	4,1216	0,24262	3,8077	0,26262	5,6173	1,4752	
5	1,1041	0,9057	5,2040	0,19216	4,7135	0,21216	9,2403	1,9604	
6	1,1262	0,8880	6,3081	0,15853	5,6014	0,17853	13,6801	2,4423	
7	1,1487	0,8706	7,4343	0,13451	6,4720	0,15451	18,9035	2,9208	
8	1,1717	0,8535	8,5830	0,11651	7,3255	0,13651	24,8779	3,3961	
9	1,1951	0,8368	9,7546	0,10252	8,1622	0,12252	31,5720	3,8681	
10	1,2190	0,8203	10,9497	0,09133	8,9826	0,11133	38,9551	4,3367	
11	1,2434	0,8043	12,1687	0,08218	9,7868	0,10218	46,9977	4,8021	
12	1,2682	0,7885	13,4121	0,07456	10,5753	0,09456	55,6712	5,2642	
13	1,2936	0,7730	14,6803	0,06812	11,3484	0,08812	64,9475	5,7231	
14	1,3195	0,7579	15,9739	0,06260	12,1062	0,08260	74,7999	6,1786	
15	1,3459	0,7430	17,2934	0,05783	12,8493	0,07783	85,2021	6,6309	
16	1,3728	0,7284	18,6393	0,05365	13,5777	0,07365	96,1288	7,0799	
17	1,4002	0,7142	20,0121	0,04997	14,2919	0,06997	107,5554	7,5256	
18	1,4282	0,7002	21,4123	0,04670	14,9920	0,06670	119,4581	7,9681	
19	1,4568	0,6864	22,8406	0,04378	15,6785	0,06378	131,8139	8,4073	
20	1,4859	0,6730	24,2974	0,04116	16,3514	0,06116	144,6003	8,8433	
21	1,5157	0,6598	25,7833	0,03878	17,0112	0,05878	157,7959	9,2760	
22	1,5460	0,6468	27,2990	0,03663	17,6580	0,05663	171,3795	9,7055	
23	1,5769	0,6342	28,8450	0,03467	18,2922	0,05467	185,3309	10,1317	
24	1,6084	0,6217	30,4219	0,03287	18,9139	0,05287	199,6305	10,5547	
25	1,6406	0,6095	32,0303	0,03122	19,5235	0,05122	214,2592	10,9745	
26	1,6734	0,5976	33,6709	0,02970	20,1210	0,04970	229,1987	11,3910	
27	1,7069	0,5859	35,3443	0,02829	20,7069	0,04829	244,4311	11,8043	
28	1,7410	0,5744	37,0512	0,02699	21,2813	0,04699	259,9392	12,2145	
29	1,7758	0,5631	38,7922	0,02578	21,8444	0,04578	275,7064	12,6214	
30	1,8114	0,5521	40,5681	0,02465	22,3965	0,04465	291,7164	13,0251	
36	2,0399	0,4902	51,9944	0,01923	25,4888	0,03923	392,0405	15,3809	
40	2,2080	0,4529	60,4020	0,01656	27,3555	0,03656	461,9931	16,8885	
48	2,5871	0,3865	79,3535	0,01260	30,6731	0,03260	605,9657	19,7556	
50	2,6916	0,3715	84,5794	0,01182	31,4236	0,03182	642,3606	20,4420	
55	2,9717	0,3365	98,5865	0,01014	33,1748	0,03014	733,3527	22,1057	
60	3,2810	0,3048	114,0515	0,00877	34,7609	0,02877	823,6975	23,6961	
65	3,6225	0,2761	131,1262	0,00763	36,1975	0,02763	912,7085	25,2147	
70	3,9996	0,2500	149,9779	0,00667	37,4986	0,02667	999,8343	26,6632	
75	4,4158	0,2265	170,7918	0,00586	38,6771	0,02586	1084,6393	28,0434	
80	4,8754	0,2051	193,7720	0,00516	39,7445	0,02516	1166,7868	29,3572	
85	5,3829	0,1858	219,1439	0,00456	40,7113	0,02456	1246,0241	30,6064	

Factores de Interés Compuesto								
3,00%							3,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0300	0,9709	1,0000	1,00000	0,9709	1,03000		
2	1,0609	0,9426	2,0300	0,49261	1,9135	0,52261	0,9426	0,4926
3	1,0927	0,9151	3,0909	0,32353	2,8286	0,35353	2,7729	0,9803
4	1,1255	0,8885	4,1836	0,23903	3,7171	0,26903	5,4383	1,4631
5	1,1593	0,8626	5,3091	0,18835	4,5797	0,21835	8,8888	1,9409
6	1,1941	0,8375	6,4684	0,15460	5,4172	0,18460	13,0762	2,4138
7	1,2299	0,8131	7,6625	0,13051	6,2303	0,16051	17,9547	2,8819
8	1,2668	0,7894	8,8923	0,11246	7,0197	0,14246	23,4806	3,3450
9	1,3048	0,7664	10,1591	0,09843	7,7861	0,12843	29,6119	3,8032
10	1,3439	0,7441	11,4639	0,08723	8,5302	0,11723	36,3088	4,2565
11	1,3842	0,7224	12,8078	0,07808	9,2526	0,10808	43,5330	4,7049
12	1,4258	0,7014	14,1920	0,07046	9,9540	0,10046	51,2482	5,1485
13	1,4685	0,6810	15,6178	0,06403	10,6350	0,09403	59,4196	5,5872
14	1,5126	0,6611	17,0863	0,05853	11,2961	0,08853	68,0141	6,0210
15	1,5580	0,6419	18,5989	0,05377	11,9379	0,08377	77,0002	6,4500
16	1,6047	0,6232	20,1569	0,04961	12,5611	0,07961	86,3477	6,8742
17	1,6528	0,6050	21,7616	0,04595	13,1661	0,07595	96,0280	7,2936
18	1,7024	0,5874	23,4144	0,04271	13,7535	0,07271	106,0137	7,7081
19	1,7535	0,5703	25,1169	0,03981	14,3238	0,06981	116,2788	8,1179
20	1,8061	0,5537	26,8704	0,03722	14,8775	0,06722	126,7987	8,5229
21	1,8603	0,5375	28,6765	0,03487	15,4150	0,06487	137,5496	8,9231
22	1,9161	0,5219	30,5368	0,03275	15,9369	0,06275	148,5094	9,3186
23	1,9736	0,5067	32,4529	0,03081	16,4436	0,06081	159,6566	9,7093
24	2,0328	0,4919	34,4265	0,02905	16,9355	0,05905	170,9711	10,0954
25	2,0938	0,4776	36,4593	0,02743	17,4131	0,05743	182,4336	10,4768
26	2,1566	0,4637	38,5530	0,02594	17,8768	0,05594	194,0260	10,8535
27	2,2213	0,4502	40,7096	0,02456	18,3270	0,05456	205,7309	11,2255
28	2,2879	0,4371	42,9309	0,02329	18,7641	0,05329	217,5320	11,5930
29	2,3566	0,4243	45,2189	0,02211	19,1885	0,05211	229,4137	11,9558
30	2,4273	0,4120	47,5754	0,02102	19,6004	0,05102	241,3613	12,3141
36	2,8983	0,3450	63,2759	0,01580	21,8323	0,04580	313,7028	14,3688
40	3,2620	0,3066	75,4013	0,01326	23,1148	0,04326	361,7499	15,6502
48	4,1323	0,2420	104,4084	0,00958	25,2667	0,03958	455,0255	18,0089
50	4,3839	0,2281	112,7969	0,00887	25,7298	0,03887	477,4803	18,5575
55	5,0821	0,1968	136,0716	0,00735	26,7744	0,03735	531,7411	19,8600
60	5,8916	0,1697	163,0534	0,00613	27,6756	0,03613	583,0526	21,0674
65	6,8300	0,1464	194,3328	0,00515	28,4529	0,03515	631,2010	22,1841
70	7,9178	0,1263	230,5941	0,00434	29,1234	0,03434	676,0869	23,2145
75	9,1789	0,1089	272,6309	0,00367	29,7018	0,03367	717,6978	24,1634
80	10,6409	0,0940	321,3630	0,00311	30,2008	0,03311	756,0865	25,0353
85	12,3357	0,0811	377,8570	0,00265	30,6312	0,03265	791,3529	25,8349

Factores de Interés Compuesto

4,00%									4,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,0400	0,9615	1,0000	1,00000	0,9615	1,04000			
2	1,0816	0,9246	2,0400	0,49020	1,8861	0,53020	0,9246	0,4902	
3	1,1249	0,8890	3,1216	0,32035	2,7751	0,36035	2,7025	0,9739	
4	1,1699	0,8548	4,2465	0,23549	3,6299	0,27549	5,2670	1,4510	
5	1,2167	0,8219	5,4163	0,18463	4,4518	0,22463	8,5547	1,9216	
6	1,2653	0,7903	6,6330	0,15076	5,2421	0,19076	12,5062	2,3857	
7	1,3159	0,7599	7,8983	0,12661	6,0021	0,16661	17,0657	2,8433	
8	1,3686	0,7307	9,2142	0,10853	6,7327	0,14853	22,1806	3,2944	
9	1,4233	0,7026	10,5828	0,09449	7,4353	0,13449	27,8013	3,7391	
10	1,4802	0,6756	12,0061	0,08329	8,1109	0,12329	33,8814	4,1773	
11	1,5395	0,6496	13,4864	0,07415	8,7605	0,11415	40,3772	4,6090	
12	1,6010	0,6246	15,0258	0,06655	9,3851	0,10655	47,2477	5,0343	
13	1,6651	0,6006	16,6268	0,06014	9,9856	0,10014	54,4546	5,4533	
14	1,7317	0,5775	18,2919	0,05467	10,5631	0,09467	61,9618	5,8659	
15	1,8009	0,5553	20,0236	0,04994	11,1184	0,08994	69,7355	6,2721	
16	1,8730	0,5339	21,8245	0,04582	11,6523	0,08582	77,7441	6,6720	
17	1,9479	0,5134	23,6975	0,04220	12,1657	0,08220	85,9581	7,0656	
18	2,0258	0,4936	25,6454	0,03899	12,6593	0,07899	94,3498	7,4530	
19	2,1068	0,4746	27,6712	0,03614	13,1339	0,07614	102,8933	7,8342	
20	2,1911	0,4564	29,7781	0,03358	13,5903	0,07358	111,5647	8,2091	
21	2,2788	0,4388	31,9692	0,03128	14,0292	0,07128	120,3414	8,5779	
22	2,3699	0,4220	34,2480	0,02920	14,4511	0,06920	129,2024	8,9407	
23	2,4647	0,4057	36,6179	0,02731	14,8568	0,06731	138,1284	9,2973	
24	2,5633	0,3901	39,0826	0,02559	15,2470	0,06559	147,1012	9,6479	
25	2,6658	0,3751	41,6459	0,02401	15,6221	0,06401	156,1040	9,9925	
26	2,7725	0,3607	44,3117	0,02257	15,9828	0,06257	165,1212	10,3312	
27	2,8834	0,3468	47,0842	0,02124	16,3296	0,06124	174,1385	10,6640	
28	2,9987	0,3335	49,9676	0,02001	16,6631	0,06001	183,1424	10,9909	
29	3,1187	0,3207	52,9663	0,01888	16,9837	0,05888	192,1206	11,3120	
30	3,2434	0,3083	56,0849	0,01783	17,2920	0,05783	201,0618	11,6274	
36	4,1039	0,2437	77,5983	0,01289	18,9083	0,05289	253,4052	13,4018	
40	4,8010	0,2083	95,0255	0,01052	19,7928	0,05052	286,5303	14,4765	
48	6,5705	0,1522	139,2632	0,00718	21,1951	0,04718	347,2446	16,3832	
50	7,1067	0,1407	152,6671	0,00655	21,4822	0,04655	361,1638	16,8122	
55	8,6464	0,1157	191,1592	0,00523	22,1086	0,04523	393,6890	17,8070	
60	10,5196	0,0951	237,9907	0,00420	22,6235	0,04420	422,9966	18,6972	
65	12,7987	0,0781	294,9684	0,00339	23,0467	0,04339	449,2014	19,4909	
70	15,5716	0,0642	364,2905	0,00275	23,3945	0,04275	472,4789	20,1961	
75	18,9453	0,0528	448,6314	0,00223	23,6804	0,04223	493,0408	20,8206	
80	23,0498	0,0434	551,2450	0,00181	23,9154	0,04181	511,1161	21,3718	
85	28,0436	0,0357	676,0901	0,00148	24,1085	0,04148	526,9384	21,8569	

Factores de Interés Compuesto								
5,00%							5,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0500	0,9524	1,0000	1,00000	0,9524	1,05000		
2	1,1025	0,9070	2,0500	0,48780	1,8594	0,53780	0,9070	0,4878
3	1,1576	0,8638	3,1525	0,31721	2,7232	0,36721	2,6347	0,9675
4	1,2155	0,8227	4,3101	0,23201	3,5460	0,28201	5,1028	1,4391
5	1,2763	0,7835	5,5256	0,18097	4,3295	0,23097	8,2369	1,9025
6	1,3401	0,7462	6,8019	0,14702	5,0757	0,19702	11,9680	2,3579
7	1,4071	0,7107	8,1420	0,12282	5,7864	0,17282	16,2321	2,8052
8	1,4775	0,6768	9,5491	0,10472	6,4632	0,15472	20,9700	3,2445
9	1,5513	0,6446	11,0266	0,09069	7,1078	0,14069	26,1268	3,6758
10	1,6289	0,6139	12,5779	0,07950	7,7217	0,12950	31,6520	4,0991
11	1,7103	0,5847	14,2068	0,07039	8,3064	0,12039	37,4988	4,5144
12	1,7959	0,5568	15,9171	0,06283	8,8633	0,11283	43,6241	4,9219
13	1,8856	0,5303	17,7130	0,05646	9,3936	0,10646	49,9879	5,3215
14	1,9799	0,5051	19,5986	0,05102	9,8986	0,10102	56,5538	5,7133
15	2,0789	0,4810	21,5786	0,04634	10,3797	0,09634	63,2880	6,0973
16	2,1829	0,4581	23,6575	0,04227	10,8378	0,09227	70,1597	6,4736
17	2,2920	0,4363	25,8404	0,03870	11,2741	0,08870	77,1405	6,8423
18	2,4066	0,4155	28,1324	0,03555	11,6896	0,08555	84,2043	7,2034
19	2,5270	0,3957	30,5390	0,03275	12,0853	0,08275	91,3275	7,5569
20	2,6533	0,3769	33,0660	0,03024	12,4622	0,08024	98,4884	7,9030
21	2,7860	0,3589	35,7193	0,02800	12,8212	0,07800	105,6673	8,2416
22	2,9253	0,3418	38,5052	0,02597	13,1630	0,07597	112,8461	8,5730
23	3,0715	0,3256	41,4305	0,02414	13,4886	0,07414	120,0087	8,8971
24	3,2251	0,3101	44,5020	0,02247	13,7986	0,07247	127,1402	9,2140
25	3,3864	0,2953	47,7271	0,02095	14,0939	0,07095	134,2275	9,5238
26	3,5557	0,2812	51,1135	0,01956	14,3752	0,06956	141,2585	9,8266
27	3,7335	0,2678	54,6691	0,01829	14,6430	0,06829	148,2226	10,1224
28	3,9201	0,2551	58,4026	0,01712	14,8981	0,06712	155,1101	10,4114
29	4,1161	0,2429	62,3227	0,01605	15,1411	0,06605	161,9126	10,6936
30	4,3219	0,2314	66,4388	0,01505	15,3725	0,06505	168,6226	10,9691
36	5,7918	0,1727	95,8363	0,01043	16,5469	0,06043	206,6237	12,4872
40	7,0400	0,1420	120,7998	0,00828	17,1591	0,05828	229,5452	13,3775
48	10,4013	0,0961	188,0254	0,00532	18,0772	0,05532	269,2467	14,8943
50	11,4674	0,0872	209,3480	0,00478	18,2559	0,05478	277,9148	15,2233
55	14,6356	0,0683	272,7126	0,00367	18,6335	0,05367	297,5104	15,9664
60	18,6792	0,0535	353,5837	0,00283	18,9293	0,05283	314,3432	16,6062
65	23,8399	0,0419	456,7980	0,00219	19,1611	0,05219	328,6910	17,1541
70	30,4264	0,0329	588,5285	0,00170	19,3427	0,05170	340,8409	17,6212
75	38,8327	0,0258	756,6537	0,00132	19,4850	0,05132	351,0721	18,0176
80	49,5614	0,0202	971,2288	0,00103	19,5965	0,05103	359,6460	18,3526
85	63,2544	0,0158	1245,0871	0,00080	19,6838	0,05080	366,8007	18,6346

Factores de Interés Compuesto

6,00%								6,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,0600	0,9434	1,0000	1,00000	0,9434	1,06000			
2	1,1236	0,8900	2,0600	0,48544	1,8334	0,54544	0,8900	0,4854	
3	1,1910	0,8396	3,1836	0,31411	2,6730	0,37411	2,5692	0,9612	
4	1,2625	0,7921	4,3746	0,22859	3,4651	0,28859	4,9455	1,4272	
5	1,3382	0,7473	5,6371	0,17740	4,2124	0,23740	7,9345	1,8836	
6	1,4185	0,7050	6,9753	0,14336	4,9173	0,20336	11,4594	2,3304	
7	1,5036	0,6651	8,3938	0,11914	5,5824	0,17914	15,4497	2,7676	
8	1,5938	0,6274	9,8975	0,10104	6,2098	0,16104	19,8416	3,1952	
9	1,6895	0,5919	11,4913	0,08702	6,8017	0,14702	24,5768	3,6133	
10	1,7908	0,5584	13,1808	0,07587	7,3601	0,13587	29,6023	4,0220	
11	1,8983	0,5268	14,9716	0,06679	7,8869	0,12679	34,8702	4,4213	
12	2,0122	0,4970	16,8699	0,05928	8,3838	0,11928	40,3369	4,8113	
13	2,1329	0,4688	18,8821	0,05296	8,8527	0,11296	45,9629	5,1920	
14	2,2609	0,4423	21,0151	0,04758	9,2950	0,10758	51,7128	5,5635	
15	2,3966	0,4173	23,2760	0,04296	9,7122	0,10296	57,5546	5,9260	
16	2,5404	0,3936	25,6725	0,03895	10,1059	0,09895	63,4592	6,2794	
17	2,6928	0,3714	28,2129	0,03544	10,4773	0,09544	69,4011	6,6240	
18	2,8543	0,3503	30,9057	0,03236	10,8276	0,09236	75,3569	6,9597	
19	3,0256	0,3305	33,7600	0,02962	11,1581	0,08962	81,3062	7,2867	
20	3,2071	0,3118	36,7856	0,02718	11,4699	0,08718	87,2304	7,6051	
21	3,3996	0,2942	39,9927	0,02500	11,7641	0,08500	93,1136	7,9151	
22	3,6035	0,2775	43,3923	0,02305	12,0416	0,08305	98,9412	8,2166	
23	3,8197	0,2618	46,9958	0,02128	12,3034	0,08128	104,7007	8,5099	
24	4,0489	0,2470	50,8156	0,01968	12,5504	0,07968	110,3812	8,7951	
25	4,2919	0,2330	54,8645	0,01823	12,7834	0,07823	115,9732	9,0722	
26	4,5494	0,2198	59,1564	0,01690	13,0032	0,07690	121,4684	9,3414	
27	4,8223	0,2074	63,7058	0,01570	13,2105	0,07570	126,8600	9,6029	
28	5,1117	0,1956	68,5281	0,01459	13,4062	0,07459	132,1420	9,8568	
29	5,4184	0,1846	73,6398	0,01358	13,5907	0,07358	137,3096	10,1032	
30	5,7435	0,1741	79,0582	0,01265	13,7648	0,07265	142,3588	10,3422	
36	8,1473	0,1227	119,1209	0,00839	14,6210	0,06839	170,0387	11,6298	
40	10,2857	0,0972	154,7620	0,00646	15,0463	0,06646	185,9568	12,3590	
48	16,3939	0,0610	256,5645	0,00390	15,6500	0,06390	212,0351	13,5485	
50	18,4202	0,0543	290,3359	0,00344	15,7619	0,06344	217,4574	13,7964	
55	24,6503	0,0406	394,1720	0,00254	15,9905	0,06254	229,3222	14,3411	
60	32,9877	0,0303	533,1282	0,00188	16,1614	0,06188	239,0428	14,7909	
65	44,1450	0,0227	719,0829	0,00139	16,2891	0,06139	246,9450	15,1601	
70	59,0759	0,0169	967,9322	0,00103	16,3845	0,06103	253,3271	15,4613	
75	79,0569	0,0126	1300,9487	0,00077	16,4558	0,06077	258,4527	15,7058	
80	105,7960	0,0095	1746,5999	0,00057	16,5091	0,06057	262,5493	15,9033	
85	141,5789	0,0071	2342,9817	0,00043	16,5489	0,06043	265,8096	16,0620	

Factores de Interés Compuesto								
7,00%							7,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0700	0,9346	1,0000	1,00000	0,9346	1,07000		
2	1,1449	0,8734	2,0700	0,48309	1,8080	0,55309	0,8734	0,4831
3	1,2250	0,8163	3,2149	0,31105	2,6243	0,38105	2,5060	0,9549
4	1,3108	0,7629	4,4399	0,22523	3,3872	0,29523	4,7947	1,4155
5	1,4026	0,7130	5,7507	0,17389	4,1002	0,24389	7,6467	1,8650
6	1,5007	0,6663	7,1533	0,13980	4,7665	0,20980	10,9784	2,3032
7	1,6058	0,6227	8,6540	0,11555	5,3893	0,18555	14,7149	2,7304
8	1,7182	0,5820	10,2598	0,09747	5,9713	0,16747	18,7889	3,1465
9	1,8385	0,5439	11,9780	0,08349	6,5152	0,15349	23,1404	3,5517
10	1,9672	0,5083	13,8164	0,07238	7,0236	0,14238	27,7156	3,9461
11	2,1049	0,4751	15,7836	0,06336	7,4987	0,13336	32,4665	4,3296
12	2,2522	0,4440	17,8885	0,05590	7,9427	0,12590	37,3506	4,7025
13	2,4098	0,4150	20,1406	0,04965	8,3577	0,11965	42,3302	5,0648
14	2,5785	0,3878	22,5505	0,04434	8,7455	0,11434	47,3718	5,4167
15	2,7590	0,3624	25,1290	0,03979	9,1079	0,10979	52,4461	5,7583
16	2,9522	0,3387	27,8881	0,03586	9,4466	0,10586	57,5271	6,0897
17	3,1588	0,3166	30,8402	0,03243	9,7632	0,10243	62,5923	6,4110
18	3,3799	0,2959	33,9990	0,02941	10,0591	0,09941	67,6219	6,7225
19	3,6165	0,2765	37,3790	0,02675	10,3356	0,09675	72,5991	7,0242
20	3,8697	0,2584	40,9955	0,02439	10,5940	0,09439	77,5091	7,3163
21	4,1406	0,2415	44,8652	0,02229	10,8355	0,09229	82,3393	7,5990
22	4,4304	0,2257	49,0057	0,02041	11,0612	0,09041	87,0793	7,8725
23	4,7405	0,2109	53,4361	0,01871	11,2722	0,08871	91,7201	8,1369
24	5,0724	0,1971	58,1767	0,01719	11,4693	0,08719	96,2545	8,3923
25	5,4274	0,1842	63,2490	0,01581	11,6536	0,08581	100,6765	8,6391
26	5,8074	0,1722	68,6765	0,01456	11,8258	0,08456	104,9814	8,8773
27	6,2139	0,1609	74,4838	0,01343	11,9867	0,08343	109,1656	9,1072
28	6,6488	0,1504	80,6977	0,01239	12,1371	0,08239	113,2264	9,3289
29	7,1143	0,1406	87,3465	0,01145	12,2777	0,08145	117,1622	9,5427
30	7,6123	0,1314	94,4608	0,01059	12,4090	0,08059	120,9718	9,7487
36	11,4239	0,0875	148,9135	0,00672	13,0352	0,07672	141,1990	10,8321
40	14,9745	0,0668	199,6351	0,00501	13,3317	0,07501	152,2928	11,4233
48	25,7289	0,0389	353,2701	0,00283	13,7305	0,07283	169,4981	12,3447
50	29,4570	0,0339	406,5289	0,00246	13,8007	0,07246	172,9051	12,5287
55	41,3150	0,0242	575,9286	0,00174	13,9399	0,07174	180,1243	12,9215
60	57,9464	0,0173	813,5204	0,00123	14,0392	0,07123	185,7677	13,2321
65	81,2729	0,0123	1146,7552	0,00087	14,1099	0,07087	190,1452	13,4760
70	113,9894	0,0088	1614,1342	0,00062	14,1604	0,07062	193,5185	13,6662
75	159,8760	0,0063	2269,6574	0,00044	14,1964	0,07044	196,1035	13,8136
80	224,2344	0,0045	3189,0627	0,00031	14,2220	0,07031	198,0748	13,9273
85	314,5003	0,0032	4478,5761	0,00022	14,2403	0,07022	199,5717	14,0146

Factores de Interés Compuesto

8,00%								8,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,0800	0,9259	1,0000	1,00000	0,9259	1,08000			
2	1,1664	0,8573	2,0800	0,48077	1,7833	0,56077	0,8573	0,4808	
3	1,2597	0,7938	3,2464	0,30803	2,5771	0,38803	2,4450	0,9487	
4	1,3605	0,7350	4,5061	0,22192	3,3121	0,30192	4,6501	1,4040	
5	1,4693	0,6806	5,8666	0,17046	3,9927	0,25046	7,3724	1,8465	
6	1,5869	0,6302	7,3359	0,13632	4,6229	0,21632	10,5233	2,2763	
7	1,7138	0,5835	8,9228	0,11207	5,2064	0,19207	14,0242	2,6937	
8	1,8509	0,5403	10,6366	0,09401	5,7466	0,17401	17,8061	3,0985	
9	1,9990	0,5002	12,4876	0,08008	6,2469	0,16008	21,8081	3,4910	
10	2,1589	0,4632	14,4866	0,06903	6,7101	0,14903	25,9768	3,8713	
11	2,3316	0,4289	16,6455	0,06008	7,1390	0,14008	30,2657	4,2395	
12	2,5182	0,3971	18,9771	0,05270	7,5361	0,13270	34,6339	4,5957	
13	2,7196	0,3677	21,4953	0,04652	7,9038	0,12652	39,0463	4,9402	
14	2,9372	0,3405	24,2149	0,04130	8,2442	0,12130	43,4723	5,2731	
15	3,1722	0,3152	27,1521	0,03683	8,5595	0,11683	47,8857	5,5945	
16	3,4259	0,2919	30,3243	0,03298	8,8514	0,11298	52,2640	5,9046	
17	3,7000	0,2703	33,7502	0,02963	9,1216	0,10963	56,5883	6,2037	
18	3,9960	0,2502	37,4502	0,02670	9,3719	0,10670	60,8426	6,4920	
19	4,3157	0,2317	41,4463	0,02413	9,6036	0,10413	65,0134	6,7697	
20	4,6610	0,2145	45,7620	0,02185	9,8181	0,10185	69,0898	7,0369	
21	5,0338	0,1987	50,4229	0,01983	10,0168	0,09983	73,0629	7,2940	
22	5,4365	0,1839	55,4568	0,01803	10,2007	0,09803	76,9257	7,5412	
23	5,8715	0,1703	60,8933	0,01642	10,3711	0,09642	80,6726	7,7786	
24	6,3412	0,1577	66,7648	0,01498	10,5288	0,09498	84,2997	8,0066	
25	6,8485	0,1460	73,1059	0,01368	10,6748	0,09368	87,8041	8,2254	
26	7,3964	0,1352	79,9544	0,01251	10,8100	0,09251	91,1842	8,4352	
27	7,9881	0,1252	87,3508	0,01145	10,9352	0,09145	94,4390	8,6363	
28	8,6271	0,1159	95,3388	0,01049	11,0511	0,09049	97,5687	8,8289	
29	9,3173	0,1073	103,9659	0,00962	11,1584	0,08962	100,5738	9,0133	
30	10,0627	0,0994	113,2832	0,00883	11,2578	0,08883	103,4558	9,1897	
36	15,9682	0,0626	187,1021	0,00534	11,7172	0,08534	118,2839	10,0949	
40	21,7245	0,0460	259,0565	0,00386	11,9246	0,08386	126,0422	10,5699	
48	40,2106	0,0249	490,1322	0,00204	12,1891	0,08204	137,4428	11,2758	
50	46,9016	0,0213	573,7702	0,00174	12,2335	0,08174	139,5928	11,4107	
55	68,9139	0,0145	848,9232	0,00118	12,3186	0,08118	144,0065	11,6902	
60	101,2571	0,0099	1253,2133	0,00080	12,3766	0,08080	147,3000	11,9015	
65	148,7798	0,0067	1847,2481	0,00054	12,4160	0,08054	149,7387	12,0602	
70	218,6064	0,0046	2720,0801	0,00037	12,4428	0,08037	151,5326	12,1783	
75	321,2045	0,0031	4002,5566	0,00025	12,4611	0,08025	152,8448	12,2658	
80	471,9548	0,0021	5886,9354	0,00017	12,4735	0,08017	153,8001	12,3301	
85	693,4565	0,0014	8655,7061	0,00012	12,4820	0,08012	154,4925	12,3772	

Factores de Interés Compuesto								
9,00%							9,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,0900	0,9174	1,0000	1,00000	0,9174	1,09000		
2	1,1881	0,8417	2,0900	0,47847	1,7591	0,56847	0,8417	0,4785
3	1,2950	0,7722	3,2781	0,30505	2,5313	0,39505	2,3860	0,9426
4	1,4116	0,7084	4,5731	0,21867	3,2397	0,30867	4,5113	1,3925
5	1,5386	0,6499	5,9847	0,16709	3,8897	0,25709	7,1110	1,8282
6	1,6771	0,5963	7,5233	0,13292	4,4859	0,22292	10,0924	2,2498
7	1,8280	0,5470	9,2004	0,10869	5,0330	0,19869	13,3746	2,6574
8	1,9926	0,5019	11,0285	0,09067	5,5348	0,18067	16,8877	3,0512
9	2,1719	0,4604	13,0210	0,07680	5,9952	0,16680	20,5711	3,4312
10	2,3674	0,4224	15,1929	0,06582	6,4177	0,15582	24,3728	3,7978
11	2,5804	0,3875	17,5603	0,05695	6,8052	0,14695	28,2481	4,1510
12	2,8127	0,3555	20,1407	0,04965	7,1607	0,13965	32,1590	4,4910
13	3,0658	0,3262	22,9534	0,04357	7,4869	0,13357	36,0731	4,8182
14	3,3417	0,2992	26,0192	0,03843	7,7862	0,12843	39,9633	5,1326
15	3,6425	0,2745	29,3609	0,03406	8,0607	0,12406	43,8069	5,4346
16	3,9703	0,2519	33,0034	0,03030	8,3126	0,12030	47,5849	5,7245
17	4,3276	0,2311	36,9737	0,02705	8,5436	0,11705	51,2821	6,0024
18	4,7171	0,2120	41,3013	0,02421	8,7556	0,11421	54,8860	6,2687
19	5,1417	0,1945	46,0185	0,02173	8,9501	0,11173	58,3868	6,5236
20	5,6044	0,1784	51,1601	0,01955	9,1285	0,10955	61,7770	6,7674
21	6,1088	0,1637	56,7645	0,01762	9,2922	0,10762	65,0509	7,0006
22	6,6586	0,1502	62,8733	0,01590	9,4424	0,10590	68,2048	7,2232
23	7,2579	0,1378	69,5319	0,01438	9,5802	0,10438	71,2359	7,4357
24	7,9111	0,1264	76,7898	0,01302	9,7066	0,10302	74,1433	7,6384
25	8,6231	0,1160	84,7009	0,01181	9,8226	0,10181	76,9265	7,8316
26	9,3992	0,1064	93,3240	0,01072	9,9290	0,10072	79,5863	8,0156
27	10,2451	0,0976	102,7231	0,00973	10,0266	0,09973	82,1241	8,1906
28	11,1671	0,0895	112,9682	0,00885	10,1161	0,09885	84,5419	8,3571
29	12,1722	0,0822	124,1354	0,00806	10,1983	0,09806	86,8422	8,5154
30	13,2677	0,0754	136,3075	0,00734	10,2737	0,09734	89,0280	8,6657
36	22,2512	0,0449	236,1247	0,00424	10,6118	0,09424	99,9319	9,4171
40	31,4094	0,0318	337,8824	0,00296	10,7574	0,09296	105,3762	9,7957
48	62,5852	0,0160	684,2804	0,00146	10,9336	0,09146	112,9625	10,3317
50	74,3575	0,0134	815,0836	0,00123	10,9617	0,09123	114,3251	10,4295
55	114,4083	0,0087	1260,0918	0,00079	11,0140	0,09079	117,0362	10,6261
60	176,0313	0,0057	1944,7921	0,00051	11,0480	0,09051	118,9683	10,7683
65	270,8460	0,0037	2998,2885	0,00033	11,0701	0,09033	120,3344	10,8702
70	416,7301	0,0024	4619,2232	0,00022	11,0844	0,09022	121,2942	10,9427
75	641,1909	0,0016	7113,2321	0,00014	11,0938	0,09014	121,9646	10,9940
80	986,5517	0,0010	10950,5741	0,00009	11,0998	0,09009	122,4306	11,0299
85	1517,9320	0,0007	16854,8003	0,00006	11,1038	0,09006	122,7533	11,0551

Factores de Interés Compuesto

10,00%									10,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,1000	0,9091	1,0000	1,00000	0,9091	1,10000			
2	1,2100	0,8264	2,1000	0,47619	1,7355	0,57619	0,8264	0,4762	
3	1,3310	0,7513	3,3100	0,30211	2,4869	0,40211	2,3291	0,9366	
4	1,4641	0,6830	4,6410	0,21547	3,1699	0,31547	4,3781	1,3812	
5	1,6105	0,6209	6,1051	0,16380	3,7908	0,26380	6,8618	1,8101	
6	1,7716	0,5645	7,7156	0,12961	4,3553	0,22961	9,6842	2,2236	
7	1,9487	0,5132	9,4872	0,10541	4,8684	0,20541	12,7631	2,6216	
8	2,1436	0,4665	11,4359	0,08744	5,3349	0,18744	16,0287	3,0045	
9	2,3579	0,4241	13,5795	0,07364	5,7590	0,17364	19,4215	3,3724	
10	2,5937	0,3855	15,9374	0,06275	6,1446	0,16275	22,8913	3,7255	
11	2,8531	0,3505	18,5312	0,05396	6,4951	0,15396	26,3963	4,0641	
12	3,1384	0,3186	21,3843	0,04676	6,8137	0,14676	29,9012	4,3884	
13	3,4523	0,2897	24,5227	0,04078	7,1034	0,14078	33,3772	4,6988	
14	3,7975	0,2633	27,9750	0,03575	7,3667	0,13575	36,8005	4,9955	
15	4,1772	0,2394	31,7725	0,03147	7,6061	0,13147	40,1520	5,2789	
16	4,5950	0,2176	35,9497	0,02782	7,8237	0,12782	43,4164	5,5493	
17	5,0545	0,1978	40,5447	0,02466	8,0216	0,12466	46,5819	5,8071	
18	5,5599	0,1799	45,5992	0,02193	8,2014	0,12193	49,6395	6,0526	
19	6,1159	0,1635	51,1591	0,01955	8,3649	0,11955	52,5827	6,2861	
20	6,7275	0,1486	57,2750	0,01746	8,5136	0,11746	55,4069	6,5081	
21	7,4002	0,1351	64,0025	0,01562	8,6487	0,11562	58,1095	6,7189	
22	8,1403	0,1228	71,4027	0,01401	8,7715	0,11401	60,6893	6,9189	
23	8,9543	0,1117	79,5430	0,01257	8,8832	0,11257	63,1462	7,1085	
24	9,8497	0,1015	88,4973	0,01130	8,9847	0,11130	65,4813	7,2881	
25	10,8347	0,0923	98,3471	0,01017	9,0770	0,11017	67,6964	7,4580	
26	11,9182	0,0839	109,1818	0,00916	9,1609	0,10916	69,7940	7,6186	
27	13,1100	0,0763	121,0999	0,00826	9,2372	0,10826	71,7773	7,7704	
28	14,4210	0,0693	134,2099	0,00745	9,3066	0,10745	73,6495	7,9137	
29	15,8631	0,0630	148,6309	0,00673	9,3696	0,10673	75,4146	8,0489	
30	17,4494	0,0573	164,4940	0,00608	9,4269	0,10608	77,0766	8,1762	
36	30,9127	0,0323	299,1268	0,00334	9,6765	0,10334	85,1194	8,7965	
40	45,2593	0,0221	442,5926	0,00226	9,7791	0,10226	88,9525	9,0962	
48	97,0172	0,0103	960,1723	0,00104	9,8969	0,10104	94,0217	9,5001	
50	117,3909	0,0085	1163,9085	0,00086	9,9148	0,10086	94,8889	9,5704	
55	189,0591	0,0053	1880,5914	0,00053	9,9471	0,10053	96,5619	9,7075	
60	304,4816	0,0033	3034,8164	0,00033	9,9672	0,10033	97,7010	9,8023	
65	490,3707	0,0020	4893,7073	0,00020	9,9796	0,10020	98,4705	9,8672	
70	789,7470	0,0013	7887,4696	0,00013	9,9873	0,10013	98,9870	9,9113	
75	1271,8954	0,0008	12708,9537	0,00008	9,9921	0,10008	99,3317	9,9410	
80	2048,4002	0,0005	20474,0021	0,00005	9,9951	0,10005	99,5606	9,9609	
85	3298,9690	0,0003	32979,6903	0,00003	9,9970	0,10003	99,7120	9,9742	

Factores de Interés Compuesto

11,00%								11,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,1100	0,9009	1,0000	1,00000	0,9009	1,11000			
2	1,2321	0,8116	2,1100	0,47393	1,7125	0,58393	0,8116	0,4739	
3	1,3676	0,7312	3,3421	0,29921	2,4437	0,40921	2,2740	0,9306	
4	1,5181	0,6587	4,7097	0,21233	3,1024	0,32233	4,2502	1,3700	
5	1,6851	0,5935	6,2278	0,16057	3,6959	0,27057	6,6240	1,7923	
6	1,8704	0,5346	7,9129	0,12638	4,2305	0,23638	9,2972	2,1976	
7	2,0762	0,4817	9,7833	0,10222	4,7122	0,21222	12,1872	2,5863	
8	2,3045	0,4339	11,8594	0,08432	5,1461	0,19432	15,2246	2,9585	
9	2,5580	0,3909	14,1640	0,07060	5,5370	0,18060	18,3520	3,3144	
10	2,8394	0,3522	16,7220	0,05980	5,8892	0,16980	21,5217	3,6544	
11	3,1518	0,3173	19,5614	0,05112	6,2065	0,16112	24,6945	3,9788	
12	3,4985	0,2858	22,7132	0,04403	6,4924	0,15403	27,8388	4,2879	
13	3,8833	0,2575	26,2116	0,03815	6,7499	0,14815	30,9290	4,5822	
14	4,3104	0,2320	30,0949	0,03323	6,9819	0,14323	33,9449	4,8619	
15	4,7846	0,2090	34,4054	0,02907	7,1909	0,13907	36,8709	5,1275	
16	5,3109	0,1883	39,1899	0,02552	7,3792	0,13552	39,6953	5,3794	
17	5,8951	0,1696	44,5008	0,02247	7,5488	0,13247	42,4095	5,6180	
18	6,5436	0,1528	50,3959	0,01984	7,7016	0,12984	45,0074	5,8439	
19	7,2633	0,1377	56,9395	0,01756	7,8393	0,12756	47,4856	6,0574	
20	8,0623	0,1240	64,2028	0,01558	7,9633	0,12558	49,8423	6,2590	
21	8,9492	0,1117	72,2651	0,01384	8,0751	0,12384	52,0771	6,4491	
22	9,9336	0,1007	81,2143	0,01231	8,1757	0,12231	54,1912	6,6283	
23	11,0263	0,0907	91,1479	0,01097	8,2664	0,12097	56,1864	6,7969	
24	12,2392	0,0817	102,1742	0,00979	8,3481	0,11979	58,0656	6,9555	
25	13,5855	0,0736	114,4133	0,00874	8,4217	0,11874	59,8322	7,1045	
26	15,0799	0,0663	127,9988	0,00781	8,4881	0,11781	61,4900	7,2443	
27	16,7386	0,0597	143,0786	0,00699	8,5478	0,11699	63,0433	7,3754	
28	18,5799	0,0538	159,8173	0,00626	8,6016	0,11626	64,4965	7,4982	
29	20,6237	0,0485	178,3972	0,00561	8,6501	0,11561	65,8542	7,6131	
30	22,8923	0,0437	199,0209	0,00502	8,6938	0,11502	67,1210	7,7206	
36	42,8181	0,0234	380,1644	0,00263	8,8786	0,11263	73,0712	8,2300	
40	65,0009	0,0154	581,8261	0,00172	8,9511	0,11172	75,7789	8,4659	
48	149,7970	0,0067	1352,6996	0,00074	9,0302	0,11074	79,1799	8,7683	
50	184,5648	0,0054	1668,7712	0,00060	9,0417	0,11060	79,7341	8,8185	
55	311,0025	0,0032	2818,2042	0,00035	9,0617	0,11035	80,7712	8,9135	
60	524,0572	0,0019	4755,0658	0,00021	9,0736	0,11021	81,4461	8,9762	
65	883,0669	0,0011	8018,7903	0,00012	9,0806	0,11012	81,8819	9,0172	
70	1488,0191	0,0007	13518,3557	0,00007	9,0848	0,11007	82,1614	9,0438	
75	2507,3988	0,0004	22785,4434	0,00004	9,0873	0,11004	82,3397	9,0610	
80	4225,1128	0,0002	38401,0250	0,00003	9,0888	0,11003	82,4529	9,0720	
85	7119,5607	0,0001	64714,1881	0,00002	9,0896	0,11002	82,5245	9,0790	

Factores de Interés Compuesto

12,00%		12,00%						
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,1200	0,8929	1,0000	1,00000	0,8929	1,12000		
2	1,2544	0,7972	2,1200	0,47170	1,6901	0,59170	0,7972	0,4717
3	1,4049	0,7118	3,3744	0,29635	2,4018	0,41635	2,2208	0,9246
4	1,5735	0,6355	4,7793	0,20923	3,0373	0,32923	4,1273	1,3589
5	1,7623	0,5674	6,3528	0,15741	3,6048	0,27741	6,3970	1,7746
6	1,9738	0,5066	8,1152	0,12323	4,1114	0,24323	8,9302	2,1720
7	2,2107	0,4523	10,0890	0,09912	4,5638	0,21912	11,6443	2,5515
8	2,4760	0,4039	12,2997	0,08130	4,9676	0,20130	14,4714	2,9131
9	2,7731	0,3606	14,7757	0,06768	5,3282	0,18768	17,3563	3,2574
10	3,1058	0,3220	17,5487	0,05698	5,6502	0,17698	20,2541	3,5847
11	3,4785	0,2875	20,6546	0,04842	5,9377	0,16842	23,1288	3,8953
12	3,8960	0,2567	24,1331	0,04144	6,1944	0,16144	25,9523	4,1897
13	4,3635	0,2292	28,0291	0,03568	6,4235	0,15568	28,7024	4,4683
14	4,8871	0,2046	32,3926	0,03087	6,6282	0,15087	31,3624	4,7317
15	5,4736	0,1827	37,2797	0,02682	6,8109	0,14682	33,9202	4,9803
16	6,1304	0,1631	42,7533	0,02339	6,9740	0,14339	36,3670	5,2147
17	6,8660	0,1456	48,8837	0,02046	7,1196	0,14046	38,6973	5,4353
18	7,6900	0,1300	55,7497	0,01794	7,2497	0,13794	40,9080	5,6427
19	8,6128	0,1161	63,4397	0,01576	7,3658	0,13576	42,9979	5,8375
20	9,6463	0,1037	72,0524	0,01388	7,4694	0,13388	44,9676	6,0202
21	10,8038	0,0926	81,6987	0,01224	7,5620	0,13224	46,8188	6,1913
22	12,1003	0,0826	92,5026	0,01081	7,6446	0,13081	48,5543	6,3514
23	13,5523	0,0738	104,6029	0,00956	7,7184	0,12956	50,1776	6,5010
24	15,1786	0,0659	118,1552	0,00846	7,7843	0,12846	51,6929	6,6406
25	17,0001	0,0588	133,3339	0,00750	7,8431	0,12750	53,1046	6,7708
26	19,0401	0,0525	150,3339	0,00665	7,8957	0,12665	54,4177	6,8921
27	21,3249	0,0469	169,3740	0,00590	7,9426	0,12590	55,6369	7,0049
28	23,8839	0,0419	190,6989	0,00524	7,9844	0,12524	56,7674	7,1098
29	26,7499	0,0374	214,5828	0,00466	8,0218	0,12466	57,8141	7,2071
30	29,9599	0,0334	241,3327	0,00414	8,0552	0,12414	58,7821	7,2974
36	59,1356	0,0169	484,4631	0,00206	8,1924	0,12206	63,1970	7,7141
40	93,0510	0,0107	767,0914	0,00130	8,2438	0,12130	65,1159	7,8988
48	230,3908	0,0043	1911,5898	0,00052	8,2972	0,12052	67,4068	8,1241
50	289,0022	0,0035	2400,0182	0,00042	8,3045	0,12042	67,7624	8,1597
55	509,3206	0,0020	4236,0050	0,00024	8,3170	0,12024	68,4082	8,2251
60	897,5969	0,0011	7471,6411	0,00013	8,3240	0,12013	68,8100	8,2664
65	1581,8725	0,0006	13173,9374	0,00008	8,3281	0,12008	69,0581	8,2922
70	2787,7998	0,0004	23223,3319	0,00004	8,3303	0,12004	69,2103	8,3082
75	4913,0558	0,0002	40933,7987	0,00002	8,3316	0,12002	69,3031	8,3181
80	8658,4831	0,0001	72145,6925	0,00001	8,3324	0,12001	69,3594	8,3241
85	15259,2057	0,0001	127151,7140	0,00001	8,3328	0,12001	69,3935	8,3278

Factores de Interés Compuesto

13,00%

13,00%

n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,1300	0,8850	1,0000	1,00000	0,8850	1,13000		
2	1,2769	0,7831	2,1300	0,46948	1,6681	0,59948	0,7831	0,4695
3	1,4429	0,6931	3,4069	0,29352	2,3612	0,42352	2,1692	0,9187
4	1,6305	0,6133	4,8498	0,20619	2,9745	0,33619	4,0092	1,3479
5	1,8424	0,5428	6,4803	0,15431	3,5172	0,28431	6,1802	1,7571
6	2,0820	0,4803	8,3227	0,12015	3,9975	0,25015	8,5818	2,1468
7	2,3526	0,4251	10,4047	0,09611	4,4226	0,22611	11,1322	2,5171
8	2,6584	0,3762	12,7573	0,07839	4,7988	0,20839	13,7653	2,8685
9	3,0040	0,3329	15,4157	0,06487	5,1317	0,19487	16,4284	3,2014
10	3,3946	0,2946	18,4197	0,05429	5,4262	0,18429	19,0797	3,5162
11	3,8359	0,2607	21,8143	0,04584	5,6869	0,17584	21,6867	3,8134
12	4,3345	0,2307	25,6502	0,03899	5,9176	0,16899	24,2244	4,0936
13	4,8980	0,2042	29,9847	0,03335	6,1218	0,16335	26,6744	4,3573
14	5,5348	0,1807	34,8827	0,02867	6,3025	0,15867	29,0232	4,6050
15	6,2543	0,1599	40,4175	0,02474	6,4624	0,15474	31,2617	4,8375
16	7,0673	0,1415	46,6717	0,02143	6,6039	0,15143	33,3841	5,0552
17	7,9861	0,1252	53,7391	0,01861	6,7291	0,14861	35,3876	5,2589
18	9,0243	0,1108	61,7251	0,01620	6,8399	0,14620	37,2714	5,4491
19	10,1974	0,0981	70,7494	0,01413	6,9380	0,14413	39,0366	5,6265
20	11,5231	0,0868	80,9468	0,01235	7,0248	0,14235	40,6854	5,7917
21	13,0211	0,0768	92,4699	0,01081	7,1016	0,14081	42,2214	5,9454
22	14,7138	0,0680	105,4910	0,00948	7,1695	0,13948	43,6486	6,0881
23	16,6266	0,0601	120,2048	0,00832	7,2297	0,13832	44,9718	6,2205
24	18,7881	0,0532	136,8315	0,00731	7,2829	0,13731	46,1960	6,3431
25	21,2305	0,0471	155,6196	0,00643	7,3300	0,13643	47,3264	6,4566
26	23,9905	0,0417	176,8501	0,00565	7,3717	0,13565	48,3685	6,5614
27	27,1093	0,0369	200,8406	0,00498	7,4086	0,13498	49,3276	6,6582
28	30,6335	0,0326	227,9499	0,00439	7,4412	0,13439	50,2090	6,7474
29	34,6158	0,0289	258,5834	0,00387	7,4701	0,13387	51,0179	6,8296
30	39,1159	0,0256	293,1992	0,00341	7,4957	0,13341	51,7592	6,9052
36	81,4374	0,0123	618,7493	0,00162	7,5979	0,13162	55,0446	7,2448
40	132,7816	0,0075	1013,7042	0,00099	7,6344	0,13099	56,4087	7,3888
48	352,9923	0,0028	2707,6334	0,00037	7,6705	0,13037	57,9580	7,5559
50	450,7359	0,0022	3459,5071	0,00029	7,6752	0,13029	58,1870	7,5811
55	830,4517	0,0012	6380,3979	0,00016	7,6830	0,13016	58,5909	7,6260
60	1530,0535	0,0007	11761,9498	0,00009	7,6873	0,13009	58,8313	7,6531
65	2819,0243	0,0004	21677,1103	0,00005	7,6896	0,13005	58,9732	7,6692
70	5193,8696	0,0002	39945,1510	0,00003	7,6908	0,13003	59,0565	7,6788
75	9569,3681	0,0001	73602,8316	0,00001	7,6915	0,13001	59,1051	7,6845
80	17630,9405	0,0001	135614,9266	0,00001	7,6919	0,13001	59,1333	7,6878
85	32483,8649	0,0000	249868,1918	0,00000	7,6921	0,13000	59,1496	7,6897

Factores de Interés Compuesto

14,00%								14,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,1400	0,8772	1,0000	1,00000	0,8772	1,14000			
2	1,2996	0,7695	2,1400	0,46729	1,6467	0,60729	0,7695	0,4673	
3	1,4815	0,6750	3,4396	0,29073	2,3216	0,43073	2,1194	0,9129	
4	1,6890	0,5921	4,9211	0,20320	2,9137	0,34320	3,8957	1,3370	
5	1,9254	0,5194	6,6101	0,15128	3,4331	0,29128	5,9731	1,7399	
6	2,1950	0,4556	8,5355	0,11716	3,8887	0,25716	8,2511	2,1218	
7	2,5023	0,3996	10,7305	0,09319	4,2883	0,23319	10,6489	2,4832	
8	2,8526	0,3506	13,2328	0,07557	4,6389	0,21557	13,1028	2,8246	
9	3,2519	0,3075	16,0853	0,06217	4,9464	0,20217	15,5629	3,1463	
10	3,7072	0,2697	19,3373	0,05171	5,2161	0,19171	17,9906	3,4490	
11	4,2262	0,2366	23,0445	0,04339	5,4527	0,18339	20,3567	3,7333	
12	4,8179	0,2076	27,2707	0,03667	5,6603	0,17667	22,6399	3,9998	
13	5,4924	0,1821	32,0887	0,03116	5,8424	0,17116	24,8247	4,2491	
14	6,2613	0,1597	37,5811	0,02661	6,0021	0,16661	26,9009	4,4819	
15	7,1379	0,1401	43,8424	0,02281	6,1422	0,16281	28,8623	4,6990	
16	8,1372	0,1229	50,9804	0,01962	6,2651	0,15962	30,7057	4,9011	
17	9,2765	0,1078	59,1176	0,01692	6,3729	0,15692	32,4305	5,0888	
18	10,5752	0,0946	68,3941	0,01462	6,4674	0,15462	34,0380	5,2630	
19	12,0557	0,0829	78,9692	0,01266	6,5504	0,15266	35,5311	5,4243	
20	13,7435	0,0728	91,0249	0,01099	6,6231	0,15099	36,9135	5,5734	
21	15,6676	0,0638	104,7684	0,00954	6,6870	0,14954	38,1901	5,7111	
22	17,8610	0,0560	120,4360	0,00830	6,7429	0,14830	39,3658	5,8381	
23	20,3616	0,0491	138,2970	0,00723	6,7921	0,14723	40,4463	5,9549	
24	23,2122	0,0431	158,6586	0,00630	6,8351	0,14630	41,4371	6,0624	
25	26,4619	0,0378	181,8708	0,00550	6,8729	0,14550	42,3441	6,1610	
26	30,1666	0,0331	208,3327	0,00480	6,9061	0,14480	43,1728	6,2514	
27	34,3899	0,0291	238,4993	0,00419	6,9352	0,14419	43,9289	6,3342	
28	39,2045	0,0255	272,8892	0,00366	6,9607	0,14366	44,6176	6,4100	
29	44,6931	0,0224	312,0937	0,00320	6,9830	0,14320	45,2441	6,4791	
30	50,9502	0,0196	356,7868	0,00280	7,0027	0,14280	45,8132	6,5423	
36	111,8342	0,0089	791,6729	0,00126	7,0790	0,14126	48,2649	6,8180	
40	188,8835	0,0053	1342,0251	0,00075	7,1050	0,14075	49,2376	6,9300	
48	538,8065	0,0019	3841,4753	0,00026	7,1296	0,14026	50,2894	7,0536	
50	700,2330	0,0014	4994,5213	0,00020	7,1327	0,14020	50,4375	7,0714	
55	1348,2388	0,0007	9623,1343	0,00010	7,1376	0,14010	50,6912	7,1020	
60	2595,9187	0,0004	18535,1333	0,00005	7,1401	0,14005	50,8357	7,1197	
65	4998,2196	0,0002	35694,4260	0,00003	7,1414	0,14003	50,9173	7,1298	
70	9623,6450	0,0001	68733,1785	0,00001	7,1421	0,14001	50,9632	7,1356	
75	18529,5064	0,0001	132346,4742	0,00001	7,1425	0,14001	50,9887	7,1388	
80	35676,9818	0,0000	254828,4415	0,00000	7,1427	0,14000	51,0030	7,1406	
85	68692,9810	0,0000	490657,0073	0,00000	7,1428	0,14000	51,0108	7,1416	

Factores de Interés Compuesto

15,00%									15,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos			
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente		
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G		
1	1,1500	0,8696	1,0000	1,00000	0,8696	1,15000				
2	1,3225	0,7561	2,1500	0,46512	1,6257	0,61512	0,7561	0,4651		
3	1,5209	0,6575	3,4725	0,28798	2,2832	0,43798	2,0712	0,9071		
4	1,7490	0,5718	4,9934	0,20027	2,8550	0,35027	3,7864	1,3263		
5	2,0114	0,4972	6,7424	0,14832	3,3522	0,29832	5,7751	1,7228		
6	2,3131	0,4323	8,7537	0,11424	3,7845	0,26424	7,9368	2,0972		
7	2,6600	0,3759	11,0668	0,09036	4,1604	0,24036	10,1924	2,4498		
8	3,0590	0,3269	13,7268	0,07285	4,4873	0,22285	12,4807	2,7813		
9	3,5179	0,2843	16,7858	0,05957	4,7716	0,20957	14,7548	3,0922		
10	4,0456	0,2472	20,3037	0,04925	5,0188	0,19925	16,9795	3,3832		
11	4,6524	0,2149	24,3493	0,04107	5,2337	0,19107	19,1289	3,6549		
12	5,3503	0,1869	29,0017	0,03448	5,4206	0,18448	21,1849	3,9082		
13	6,1528	0,1625	34,3519	0,02911	5,5831	0,17911	23,1352	4,1438		
14	7,0757	0,1413	40,5047	0,02469	5,7245	0,17469	24,9725	4,3624		
15	8,1371	0,1229	47,5804	0,02102	5,8474	0,17102	26,6930	4,5650		
16	9,3576	0,1069	55,7175	0,01795	5,9542	0,16795	28,2960	4,7522		
17	10,7613	0,0929	65,0751	0,01537	6,0472	0,16537	29,7828	4,9251		
18	12,3755	0,0808	75,8364	0,01319	6,1280	0,16319	31,1565	5,0843		
19	14,2318	0,0703	88,2118	0,01134	6,1982	0,16134	32,4213	5,2307		
20	16,3665	0,0611	102,4436	0,00976	6,2593	0,15976	33,5822	5,3651		
21	18,8215	0,0531	118,8101	0,00842	6,3125	0,15842	34,6448	5,4883		
22	21,6447	0,0462	137,6316	0,00727	6,3587	0,15727	35,6150	5,6010		
23	24,8915	0,0402	159,2764	0,00628	6,3988	0,15628	36,4988	5,7040		
24	28,6252	0,0349	184,1678	0,00543	6,4338	0,15543	37,3023	5,7979		
25	32,9190	0,0304	212,7930	0,00470	6,4641	0,15470	38,0314	5,8834		
26	37,8568	0,0264	245,7120	0,00407	6,4906	0,15407	38,6918	5,9612		
27	43,5353	0,0230	283,5688	0,00353	6,5135	0,15353	39,2890	6,0319		
28	50,0656	0,0200	327,1041	0,00306	6,5335	0,15306	39,8283	6,0960		
29	57,5755	0,0174	377,1697	0,00265	6,5509	0,15265	40,3146	6,1541		
30	66,2118	0,0151	434,7451	0,00230	6,5660	0,15230	40,7526	6,2066		
36	153,1519	0,0065	1014,3457	0,00099	6,6231	0,15099	42,5872	6,4301		
40	267,8635	0,0037	1779,0903	0,00056	6,6418	0,15056	43,2830	6,5168		
48	819,4007	0,0012	5456,0047	0,00018	6,6585	0,15018	43,9997	6,6080		
50	1083,6574	0,0009	7217,7163	0,00014	6,6605	0,15014	44,0958	6,6205		
55	2179,6222	0,0005	14524,1479	0,00007	6,6636	0,15007	44,2558	6,6414		
60	4383,9987	0,0002	29219,9916	0,00003	6,6651	0,15003	44,3431	6,6530		
65	8817,7874	0,0001	58778,5826	0,00002	6,6659	0,15002	44,3903	6,6593		
70	17735,7200	0,0001	118231,4669	0,00001	6,6663	0,15001	44,4156	6,6627		
75	35672,8680	0,0000	237812,4532	0,00000	6,6665	0,15000	44,4292	6,6646		
80	71750,8794	0,0000	478332,5293	0,00000	6,6666	0,15000	44,4364	6,6656		
85	144316,6470	0,0000	962104,3133	0,00000	6,6666	0,15000	44,4402	6,6661		

Factores de Interés Compuesto

16,00%									16,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos			
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente		
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G		
1	1,1600	0,8621	1,0000	1,00000	0,8621	1,16000				
2	1,3456	0,7432	2,1600	0,46296	1,6052	0,62296	0,7432	0,4630		
3	1,5609	0,6407	3,5056	0,28526	2,2459	0,44526	2,0245	0,9014		
4	1,8106	0,5523	5,0665	0,19738	2,7982	0,35738	3,6814	1,3156		
5	2,1003	0,4761	6,8771	0,14541	3,2743	0,30541	5,5858	1,7060		
6	2,4364	0,4104	8,9775	0,11139	3,6847	0,27139	7,6380	2,0729		
7	2,8262	0,3538	11,4139	0,08761	4,0386	0,24761	9,7610	2,4169		
8	3,2784	0,3050	14,2401	0,07022	4,3436	0,23022	11,8962	2,7388		
9	3,8030	0,2630	17,5185	0,05708	4,6065	0,21708	13,9998	3,0391		
10	4,4114	0,2267	21,3215	0,04690	4,8332	0,20690	16,0399	3,3187		
11	5,1173	0,1954	25,7329	0,03886	5,0286	0,19886	17,9941	3,5783		
12	5,9360	0,1685	30,8502	0,03241	5,1971	0,19241	19,8472	3,8189		
13	6,8858	0,1452	36,7862	0,02718	5,3423	0,18718	21,5899	4,0413		
14	7,9875	0,1252	43,6720	0,02290	5,4675	0,18290	23,2175	4,2464		
15	9,2655	0,1079	51,6595	0,01936	5,5755	0,17936	24,7284	4,4352		
16	10,7480	0,0930	60,9250	0,01641	5,6685	0,17641	26,1241	4,6086		
17	12,4677	0,0802	71,6730	0,01395	5,7487	0,17395	27,4074	4,7676		
18	14,4625	0,0691	84,1407	0,01188	5,8178	0,17188	28,5828	4,9130		
19	16,7765	0,0596	98,6032	0,01014	5,8775	0,17014	29,6557	5,0457		
20	19,4608	0,0514	115,3797	0,00867	5,9288	0,16867	30,6321	5,1666		
21	22,5745	0,0443	134,8405	0,00742	5,9731	0,16742	31,5180	5,2766		
22	26,1864	0,0382	157,4150	0,00635	6,0113	0,16635	32,3200	5,3765		
23	30,3762	0,0329	183,6014	0,00545	6,0442	0,16545	33,0442	5,4671		
24	35,2364	0,0284	213,9776	0,00467	6,0726	0,16467	33,6970	5,5490		
25	40,8742	0,0245	249,2140	0,00401	6,0971	0,16401	34,2841	5,6230		
26	47,4141	0,0211	290,0883	0,00345	6,1182	0,16345	34,8114	5,6898		
27	55,0004	0,0182	337,5024	0,00296	6,1364	0,16296	35,2841	5,7500		
28	63,8004	0,0157	392,5028	0,00255	6,1520	0,16255	35,7073	5,8041		
29	74,0085	0,0135	456,3032	0,00219	6,1656	0,16219	36,0856	5,8528		
30	85,8499	0,0116	530,3117	0,00189	6,1772	0,16189	36,4234	5,8964		
36	209,1643	0,0048	1301,0270	0,00077	6,2201	0,16077	37,8000	6,0771		
40	378,7212	0,0026	2360,7572	0,00042	6,2335	0,16042	38,2992	6,1441		
48	1241,6051	0,0008	7753,7818	0,00013	6,2450	0,16013	38,7894	6,2113		
50	1670,7038	0,0006	10435,6488	0,00010	6,2463	0,16010	38,8521	6,2201		
55	3509,0488	0,0003	21925,3050	0,00005	6,2482	0,16005	38,9534	6,2343		
60	7370,2014	0,0001	46057,5085	0,00002	6,2492	0,16002	39,0063	6,2419		
65	15479,9410	0,0001	96743,3810	0,00001	6,2496	0,16001	39,0337	6,2458		
70	32513,1648		203201,0302		6,2498	0,16000	39,0478	6,2478		
75	68288,7545		426798,4658		6,2499	0,16000	39,0551	6,2489		
80	143429,7159		896429,4743		6,2500	0,16000	39,0587	6,2494		
85	301251,4072		1882815,0451		6,2500	0,16000	39,0606	6,2497		

Factores de Interés Compuesto								
17,00%						17,00%		
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,1700	0,8547	1,0000	1,0000	0,8547	1,1700		
2	1,3689	0,7305	2,1700	0,46083	1,5852	0,63083	0,7305	0,4608
3	1,6016	0,6244	3,5389	0,28257	2,2096	0,45257	1,9793	0,8958
4	1,8739	0,5337	5,1405	0,19453	2,7432	0,36453	3,5802	1,3051
5	2,1924	0,4561	7,0144	0,14256	3,1993	0,31256	5,4046	1,6893
6	2,5652	0,3898	9,2068	0,10861	3,5892	0,27861	7,3538	2,0489
7	3,0012	0,3332	11,7720	0,08495	3,9224	0,25495	9,3530	2,3845
8	3,5115	0,2848	14,7733	0,06769	4,2072	0,23769	11,3465	2,6969
9	4,1084	0,2434	18,2847	0,05469	4,4506	0,22469	13,2937	2,9870
10	4,8068	0,2080	22,3931	0,04466	4,6586	0,21466	15,1661	3,2555
11	5,6240	0,1778	27,1999	0,03676	4,8364	0,20676	16,9442	3,5035
12	6,5801	0,1520	32,8239	0,03047	4,9884	0,20047	18,6159	3,7318
13	7,6987	0,1299	39,4040	0,02538	5,1183	0,19538	20,1746	3,9417
14	9,0075	0,1110	47,1027	0,02123	5,2293	0,19123	21,6178	4,1340
15	10,5387	0,0949	56,1101	0,01782	5,3242	0,18782	22,9463	4,3098
16	12,3303	0,0811	66,6488	0,01500	5,4053	0,18500	24,1628	4,4702
17	14,4265	0,0693	78,9792	0,01266	5,4746	0,18266	25,2719	4,6162
18	16,8790	0,0592	93,4056	0,01071	5,5339	0,18071	26,2790	4,7488
19	19,7484	0,0506	110,2846	0,00907	5,5845	0,17907	27,1905	4,8689
20	23,1056	0,0433	130,0329	0,00769	5,6278	0,17769	28,0128	4,9776
21	27,0336	0,0370	153,1385	0,00653	5,6648	0,17653	28,7526	5,0757
22	31,6293	0,0316	180,1721	0,00555	5,6964	0,17555	29,4166	5,1641
23	37,0062	0,0270	211,8013	0,00472	5,7234	0,17472	30,0111	5,2436
24	43,2973	0,0231	248,8076	0,00402	5,7465	0,17402	30,5423	5,3149
25	50,6578	0,0197	292,1049	0,00342	5,7662	0,17342	31,0160	5,3789
26	59,2697	0,0169	342,7627	0,00292	5,7831	0,17292	31,4378	5,4362
27	69,3455	0,0144	402,0323	0,00249	5,7975	0,17249	31,8128	5,4873
28	81,1342	0,0123	471,3778	0,00212	5,8099	0,17212	32,1456	5,5329
29	94,9271	0,0105	552,5121	0,00181	5,8204	0,17181	32,4405	5,5736
30	111,0647	0,0090	647,4391	0,00154	5,8294	0,17154	32,7016	5,6098
36	284,8991	0,0035	1669,9945	0,00060	5,8617	0,17060	33,7373	5,7555
40	533,8687	0,0019	3134,5218	0,00032	5,8713	0,17032	34,0965	5,8073
48	1874,6550	0,0005	11021,5002	0,00009	5,8792	0,17009	34,4330	5,8567
50	2566,2153	0,0004	15089,5017	0,00007	5,8801	0,17007	34,4740	5,8629
55	5626,2937	0,0002	33089,9627	0,00003	5,8813	0,17003	34,5384	5,8726
60	12335,3565	0,0001	72555,0381	0,00001	5,8819	0,17001	34,5707	5,8775
65	27044,6281		159080,1652	0,00001	5,8821	0,17001	34,5867	5,8799
70	59293,9417		348782,0102		5,8823	0,17000	34,5945	5,8812
75	129998,8861		764693,4475		5,8823	0,17000	34,5984	5,8818
80	285015,8024		1676557,6612		5,8823	0,17000	34,6003	5,8821
85	624882,3361		3675772,5655		5,8823	0,17000	34,6012	5,8822

Factores de Interés Compuesto

18,00%		Factores de Interés Compuesto							18,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos			
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente		
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G		
1	1,1800	0,8475	1,0000	1,00000	0,8475	1,18000				
2	1,3924	0,7182	2,1800	0,45872	1,5656	0,63872	0,7182	0,4587		
3	1,6430	0,6086	3,5724	0,27992	2,1743	0,45992	1,9354	0,8902		
4	1,9388	0,5158	5,2154	0,19174	2,6901	0,37174	3,4828	1,2947		
5	2,2878	0,4371	7,1542	0,13978	3,1272	0,31978	5,2312	1,6728		
6	2,6996	0,3704	9,4420	0,10591	3,4976	0,28591	7,0834	2,0252		
7	3,1855	0,3139	12,1415	0,08236	3,8115	0,26236	8,9670	2,3526		
8	3,7589	0,2660	15,3270	0,06524	4,0776	0,24524	10,8292	2,6558		
9	4,4355	0,2255	19,0859	0,05239	4,3030	0,23239	12,6329	2,9358		
10	5,2338	0,1911	23,5213	0,04251	4,4941	0,22251	14,3525	3,1936		
11	6,1759	0,1619	28,7551	0,03478	4,6560	0,21478	15,9716	3,4303		
12	7,2876	0,1372	34,9311	0,02863	4,7932	0,20863	17,4811	3,6470		
13	8,5994	0,1163	42,2187	0,02369	4,9095	0,20369	18,8765	3,8449		
14	10,1472	0,0985	50,8180	0,01968	5,0081	0,19968	20,1576	4,0250		
15	11,9737	0,0835	60,9653	0,01640	5,0916	0,19640	21,3269	4,1887		
16	14,1290	0,0708	72,9390	0,01371	5,1624	0,19371	22,3885	4,3369		
17	16,6722	0,0600	87,0680	0,01149	5,2223	0,19149	23,3482	4,4708		
18	19,6733	0,0508	103,7403	0,00964	5,2732	0,18964	24,2123	4,5916		
19	23,2144	0,0431	123,4135	0,00810	5,3162	0,18810	24,9877	4,7003		
20	27,3930	0,0365	146,6280	0,00682	5,3527	0,18682	25,6813	4,7978		
21	32,3238	0,0309	174,0210	0,00575	5,3837	0,18575	26,3000	4,8851		
22	38,1421	0,0262	206,3448	0,00485	5,4099	0,18485	26,8506	4,9632		
23	45,0076	0,0222	244,4868	0,00409	5,4321	0,18409	27,3394	5,0329		
24	53,1090	0,0188	289,4945	0,00345	5,4509	0,18345	27,7725	5,0950		
25	62,6686	0,0160	342,6035	0,00292	5,4669	0,18292	28,1555	5,1502		
26	73,9490	0,0135	405,2721	0,00247	5,4804	0,18247	28,4935	5,1991		
27	87,2598	0,0115	479,2211	0,00209	5,4919	0,18209	28,7915	5,2425		
28	102,9666	0,0097	566,4809	0,00177	5,5016	0,18177	29,0537	5,2810		
29	121,5005	0,0082	669,4475	0,00149	5,5098	0,18149	29,2842	5,3149		
30	143,3706	0,0070	790,9480	0,00126	5,5168	0,18126	29,4864	5,3448		
36	387,0368	0,0026	2144,6489	0,00047	5,5412	0,18047	30,2677	5,4623		
40	750,3783	0,0013	4163,2130	0,00024	5,5482	0,18024	30,5269	5,5022		
48	2820,5665	0,0004	15664,2586	0,00006	5,5536	0,18006	30,7587	5,5385		
50	3927,3569	0,0003	21813,0937	0,00005	5,5541	0,18005	30,7856	5,5428		
55	8984,8411	0,0001	49910,2284	0,00002	5,5549	0,18002	30,8268	5,5494		
60	20555,1400		114189,6665	0,00001	5,5553	0,18001	30,8465	5,5526		
65	47025,1809		261245,4494		5,5554	0,18000	30,8559	5,5542		
70	107582,2224		597673,4576		5,5555	0,18000	30,8603	5,5549		
75	246122,0637		1367339,2429		5,5555	0,18000	30,8624	5,5553		
80	563067,6604		3128148,1133		5,5555	0,18000	30,8634	5,5554		
85	1288162,4077		7156452,2647		5,5556	0,18000	30,8638	5,5555		

Factores de Interés Compuesto								
19,00%								19,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,1900	0,8403	1,0000	1,00000	0,8403	1,19000		
2	1,4161	0,7062	2,1900	0,45662	1,5465	0,64662	0,7062	0,4566
3	1,6852	0,5934	3,6061	0,27731	2,1399	0,46731	1,8930	0,8846
4	2,0053	0,4987	5,2913	0,18899	2,6386	0,37899	3,3890	1,2844
5	2,3864	0,4190	7,2966	0,13705	3,0576	0,32705	5,0652	1,6566
6	2,8398	0,3521	9,6830	0,10327	3,4098	0,29327	6,8259	2,0019
7	3,3793	0,2959	12,5227	0,07985	3,7057	0,26985	8,6014	2,3211
8	4,0214	0,2487	15,9020	0,06289	3,9544	0,25289	10,3421	2,6154
9	4,7854	0,2090	19,9234	0,05019	4,1633	0,24019	12,0138	2,8856
10	5,6947	0,1756	24,7089	0,04047	4,3389	0,23047	13,5943	3,1331
11	6,7767	0,1476	30,4035	0,03289	4,4865	0,22289	15,0699	3,3589
12	8,0642	0,1240	37,1802	0,02690	4,6105	0,21690	16,4340	3,5645
13	9,5964	0,1042	45,2445	0,02210	4,7147	0,21210	17,6844	3,7509
14	11,4198	0,0876	54,8409	0,01823	4,8023	0,20823	18,8228	3,9196
15	13,5895	0,0736	66,2607	0,01509	4,8759	0,20509	19,8530	4,0717
16	16,1715	0,0618	79,8502	0,01252	4,9377	0,20252	20,7806	4,2086
17	19,2441	0,0520	96,0218	0,01041	4,9897	0,20041	21,6120	4,3314
18	22,9005	0,0437	115,2659	0,00868	5,0333	0,19868	22,3543	4,4413
19	27,2516	0,0367	138,1664	0,00724	5,0700	0,19724	23,0148	4,5394
20	32,4294	0,0308	165,4180	0,00605	5,1009	0,19605	23,6007	4,6268
21	38,5910	0,0259	197,8474	0,00505	5,1268	0,19505	24,1190	4,7045
22	45,9233	0,0218	236,4385	0,00423	5,1486	0,19423	24,5763	4,7734
23	54,6487	0,0183	282,3618	0,00354	5,1668	0,19354	24,9788	4,8344
24	65,0320	0,0154	337,0105	0,00297	5,1822	0,19297	25,3325	4,8883
25	77,3881	0,0129	402,0425	0,00249	5,1951	0,19249	25,6426	4,9359
26	92,0918	0,0109	479,4306	0,00209	5,2060	0,19209	25,9141	4,9777
27	109,5893	0,0091	571,5224	0,00175	5,2151	0,19175	26,1514	5,0145
28	130,4112	0,0077	681,1116	0,00147	5,2228	0,19147	26,3584	5,0468
29	155,1893	0,0064	811,5228	0,00123	5,2292	0,19123	26,5388	5,0751
30	184,6753	0,0054	966,7122	0,00103	5,2347	0,19103	26,6958	5,0998
36	524,4337	0,0019	2754,9143	0,00036	5,2531	0,19036	27,2867	5,1944
40	1051,6675	0,0010	5529,8290	0,00018	5,2582	0,19018	27,4743	5,2251
48	4229,1603	0,0002	22253,4753	0,00004	5,2619	0,19004	27,6345	5,2518
50	5988,9139	0,0002	31515,3363	0,00003	5,2623	0,19003	27,6523	5,2548
55	14291,6666	0,0001	75214,0348	0,00001	5,2628	0,19001	27,6786	5,2593
60	34104,9709		179494,5838	0,00001	5,2630	0,19001	27,6908	5,2614
65	81386,5222		428344,8535		5,2631	0,19000	27,6963	5,2624
70	194217,0251		1022189,6056		5,2631	0,19000	27,6988	5,2628
75	463470,5086		2439313,2029		5,2631	0,19000	27,6999	5,2630
80	1106004,5444		5821071,2861		5,2632	0,19000	27,7004	5,2631
85	2639317,9923		13891142,0647		5,2632	0,19000	27,7007	5,2631

Factores de Interés Compuesto

20,00%		20,00%						
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,2000	0,8333	1,0000	1,00000	0,8333	1,20000		
2	1,4400	0,6944	2,2000	0,45455	1,5278	0,65455	0,6944	0,4545
3	1,7280	0,5787	3,6400	0,27473	2,1065	0,47473	1,8519	0,8791
4	2,0736	0,4823	5,3680	0,18629	2,5887	0,38629	3,2986	1,2742
5	2,4883	0,4019	7,4416	0,13438	2,9906	0,33438	4,9061	1,6405
6	2,9860	0,3349	9,9299	0,10071	3,3255	0,30071	6,5806	1,9788
7	3,5832	0,2791	12,9159	0,07742	3,6046	0,27742	8,2551	2,2902
8	4,2998	0,2326	16,4991	0,06061	3,8372	0,26061	9,8831	2,5756
9	5,1598	0,1938	20,7989	0,04808	4,0310	0,24808	11,4335	2,8364
10	6,1917	0,1615	25,9587	0,03852	4,1925	0,23852	12,8871	3,0739
11	7,4301	0,1346	32,1504	0,03110	4,3271	0,23110	14,2330	3,2893
12	8,9161	0,1122	39,5805	0,02526	4,4392	0,22526	15,4667	3,4841
13	10,6993	0,0935	48,4966	0,02062	4,5327	0,22062	16,5883	3,6597
14	12,8392	0,0779	59,1959	0,01689	4,6106	0,21689	17,6008	3,8175
15	15,4070	0,0649	72,0351	0,01388	4,6755	0,21388	18,5095	3,9588
16	18,4884	0,0541	87,4421	0,01144	4,7296	0,21144	19,3208	4,0851
17	22,1861	0,0451	105,9306	0,00944	4,7746	0,20944	20,0419	4,1976
18	26,6233	0,0376	128,1167	0,00781	4,8122	0,20781	20,6805	4,2975
19	31,9480	0,0313	154,7400	0,00646	4,8435	0,20646	21,2439	4,3861
20	38,3376	0,0261	186,6880	0,00536	4,8696	0,20536	21,7395	4,4643
21	46,0051	0,0217	225,0256	0,00444	4,8913	0,20444	22,1742	4,5334
22	55,2061	0,0181	271,0307	0,00369	4,9094	0,20369	22,5546	4,5941
23	66,2474	0,0151	326,2369	0,00307	4,9245	0,20307	22,8867	4,6475
24	79,4968	0,0126	392,4842	0,00255	4,9371	0,20255	23,1760	4,6943
25	95,3962	0,0105	471,9811	0,00212	4,9476	0,20212	23,4276	4,7352
26	114,4755	0,0087	567,3773	0,00176	4,9563	0,20176	23,6460	4,7709
27	137,3706	0,0073	681,8528	0,00147	4,9636	0,20147	23,8353	4,8020
28	164,8447	0,0061	819,2233	0,00122	4,9697	0,20122	23,9991	4,8291
29	197,8136	0,0051	984,0680	0,00102	4,9747	0,20102	24,1406	4,8527
30	237,3763	0,0042	1181,8816	0,00085	4,9789	0,20085	24,2628	4,8731
36	708,8019	0,0014	3539,0094	0,00028	4,9929	0,20028	24,7108	4,9491
40	1469,7716	0,0007	7343,8578	0,00014	4,9966	0,20014	24,8469	4,9728
48	6319,7487	0,0002	31593,7436	0,00003	4,9992	0,20003	24,9581	4,9924
50	9100,4382	0,0001	45497,1908	0,00002	4,9995	0,20002	24,9698	4,9945
55	22644,8023		113219,0113	0,00001	4,9998	0,20001	24,9868	4,9976
60	56347,5144		281732,5718		4,9999	0,20000	24,9942	4,9989
65	140210,6469		701048,2346		5,0000	0,20000	24,9975	4,9995
70	348888,9569		1744439,7847		5,0000	0,20000	24,9989	4,9998
75	868147,3693		4340731,8466		5,0000	0,20000	24,9995	4,9999
80	2160228,4620		10801137,3101		5,0000	0,20000	24,9998	5,0000
85	5375339,6866		26876693,433		5,0000	0,20000	24,9999	5,0000

Factores de Interés Compuesto								
20,00%							21,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,2100	0,8264	1,0000	1,00000	0,8264	1,21000		
2	1,4641	0,6830	2,2100	0,45249	1,5095	0,66249	0,6830	0,4525
3	1,7716	0,5645	3,6741	0,27218	2,0739	0,48218	1,8120	0,8737
4	2,1436	0,4665	5,4457	0,18363	2,5404	0,39363	3,2115	1,2641
5	2,5937	0,3855	7,5892	0,13177	2,9260	0,34177	4,7537	1,6246
6	3,1384	0,3186	10,1830	0,09820	3,2446	0,30820	6,3468	1,9561
7	3,7975	0,2633	13,3214	0,07507	3,5079	0,28507	7,9268	2,2597
8	4,5950	0,2176	17,1189	0,05841	3,7256	0,26841	9,4502	2,5366
9	5,5599	0,1799	21,7139	0,04605	3,9054	0,25605	10,8891	2,7882
10	6,7275	0,1486	27,2738	0,03667	4,0541	0,24667	12,2269	3,0159
11	8,1403	0,1228	34,0013	0,02941	4,1769	0,23941	13,4553	3,2213
12	9,8497	0,1015	42,1416	0,02373	4,2784	0,23373	14,5721	3,4059
13	11,9182	0,0839	51,9913	0,01923	4,3624	0,22923	15,5790	3,5712
14	14,4210	0,0693	63,9095	0,01565	4,4317	0,22565	16,4804	3,7188
15	17,4494	0,0573	78,3305	0,01277	4,4890	0,22277	17,2828	3,8500
16	21,1138	0,0474	95,7799	0,01044	4,5364	0,22044	17,9932	3,9664
17	25,5477	0,0391	116,8937	0,00855	4,5755	0,21855	18,6195	4,0694
18	30,9127	0,0323	142,4413	0,00702	4,6079	0,21702	19,1694	4,1602
19	37,4043	0,0267	173,3540	0,00577	4,6346	0,21577	19,6506	4,2400
20	45,2593	0,0221	210,7584	0,00474	4,6567	0,21474	20,0704	4,3100
21	54,7637	0,0183	256,0176	0,00391	4,6750	0,21391	20,4356	4,3713
22	66,2641	0,0151	310,7813	0,00322	4,6900	0,21322	20,7526	4,4248
23	80,1795	0,0125	377,0454	0,00265	4,7025	0,21265	21,0269	4,4714
24	97,0172	0,0103	457,2249	0,00219	4,7128	0,21219	21,2640	4,5119
25	117,3909	0,0085	554,2422	0,00180	4,7213	0,21180	21,4685	4,5471
26	142,0429	0,0070	671,6330	0,00149	4,7284	0,21149	21,6445	4,5776
27	171,8719	0,0058	813,6759	0,00123	4,7342	0,21123	21,7957	4,6039
28	207,9651	0,0048	985,5479	0,00101	4,7390	0,21101	21,9256	4,6266
29	251,6377	0,0040	1193,5129	0,00084	4,7430	0,21084	22,0368	4,6462
30	304,4816	0,0033	1445,1507	0,00069	4,7463	0,21069	22,1321	4,6631
36	955,5938	0,0010	4545,6848	0,00022	4,7569	0,21022	22,4726	4,7242
40	2048,4002	0,0005	9749,5248	0,00010	4,7596	0,21010	22,5717	4,7424
48	9412,3437	0,0001	44815,9221	0,00002	4,7614	0,21002	22,6490	4,7568
50	13780,6123	0,0001	65617,2016	0,00002	4,7616	0,21002	22,6568	4,7583
55	35743,3594		170201,7112	0,00001	4,7618	0,21001	22,6678	4,7604
60	92709,0688		441466,9944		4,7619	0,21000	22,6724	4,7613
65	240463,4482		1145059,2773		4,7619	0,21000	22,6744	4,7616
70	623700,2558		2969996,4561		4,7619	0,21000	22,6752	4,7618
75	1617717,8358		7703413,5037		4,7619	0,21000	22,6755	4,7619
80	4195943,4391		19980678,2815		4,7619	0,21000	22,6756	4,7619
85	10883196,6582		51824741,230		4,7619	0,21000	22,6757	4,7619

Factores de Interés Compuesto

22,00%								22,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,2200	0,8197	1,0000	1,00000	0,8197	1,22000			
2	1,4884	0,6719	2,2200	0,45045	1,4915	0,67045	0,6719	0,4505	
3	1,8158	0,5507	3,7084	0,26966	2,0422	0,48966	1,7733	0,8683	
4	2,2153	0,4514	5,5242	0,18102	2,4936	0,40102	3,1275	1,2542	
5	2,7027	0,3700	7,7396	0,12921	2,8636	0,34921	4,6075	1,6090	
6	3,2973	0,3033	10,4423	0,09576	3,1669	0,31576	6,1239	1,9337	
7	4,0227	0,2486	13,7396	0,07278	3,4155	0,29278	7,6154	2,2297	
8	4,9077	0,2038	17,7623	0,05630	3,6193	0,27630	9,0417	2,4982	
9	5,9874	0,1670	22,6700	0,04411	3,7863	0,26411	10,3779	2,7409	
10	7,3046	0,1369	28,6574	0,03489	3,9232	0,25489	11,6100	2,9593	
11	8,9117	0,1122	35,9620	0,02781	4,0354	0,24781	12,7321	3,1551	
12	10,8722	0,0920	44,8737	0,02228	4,1274	0,24228	13,7438	3,3299	
13	13,2641	0,0754	55,7459	0,01794	4,2028	0,23794	14,6485	3,4855	
14	16,1822	0,0618	69,0100	0,01449	4,2646	0,23449	15,4519	3,6233	
15	19,7423	0,0507	85,1922	0,01174	4,3152	0,23174	16,1610	3,7451	
16	24,0856	0,0415	104,9345	0,00953	4,3567	0,22953	16,7838	3,8524	
17	29,3844	0,0340	129,0201	0,00775	4,3908	0,22775	17,3283	3,9465	
18	35,8490	0,0279	158,4045	0,00631	4,4187	0,22631	17,8025	4,0289	
19	43,7358	0,0229	194,2535	0,00515	4,4415	0,22515	18,2141	4,1009	
20	53,3576	0,0187	237,9893	0,00420	4,4603	0,22420	18,5702	4,1635	
21	65,0963	0,0154	291,3469	0,00343	4,4756	0,22343	18,8774	4,2178	
22	79,4175	0,0126	356,4432	0,00281	4,4882	0,22281	19,1418	4,2649	
23	96,8894	0,0103	435,8607	0,00229	4,4985	0,22229	19,3689	4,3056	
24	118,2050	0,0085	532,7501	0,00188	4,5070	0,22188	19,5635	4,3407	
25	144,2101	0,0069	650,9551	0,00154	4,5139	0,22154	19,7299	4,3709	
26	175,9364	0,0057	795,1653	0,00126	4,5196	0,22126	19,8720	4,3968	
27	214,6424	0,0047	971,1016	0,00103	4,5243	0,22103	19,9931	4,4191	
28	261,8637	0,0038	1185,7440	0,00084	4,5281	0,22084	20,0962	4,4381	
29	319,4737	0,0031	1447,6077	0,00069	4,5312	0,22069	20,1839	4,4544	
30	389,7579	0,0026	1767,0813	0,00057	4,5338	0,22057	20,2583	4,4683	
36	1285,1502	0,0008	5837,0466	0,00017	4,5419	0,22017	20,5178	4,5174	
40	2847,0378	0,0004	12936,5353	0,00008	4,5439	0,22008	20,5900	4,5314	
48	13972,4277	0,0001	63506,4897	0,00002	4,5451	0,22002	20,6441	4,5420	
50	20796,5615		94525,2793	0,00001	4,5452	0,22001	20,6492	4,5431	
55	56207,0364		255481,9837		4,5454	0,22000	20,6563	4,5445	
60	151911,2161		690500,9824		4,5454	0,22000	20,6592	4,5451	
65	410571,6839		1866230,3813		4,5454	0,22000	20,6604	4,5453	
70	1109655,4416		5043883,8256		4,5455	0,22000	20,6609	4,5454	
75	2999074,8205		13632153,7293		4,5455	0,22000	20,6610	4,5454	
80	8105623,9993		36843740,906		4,5455	0,22000	20,6611	4,5454	
85	21907136,1507		99577887,049		4,5455	0,22000	20,6611	4,5455	

Factores de Interés Compuesto								
20,00%								23,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,2300	0,8130	1,0000	1,00000	0,8130	1,23000		
2	1,5129	0,6610	2,2300	0,44843	1,4740	0,67843	0,6610	0,4484
3	1,8609	0,5374	3,7429	0,26717	2,0114	0,49717	1,7358	0,8630
4	2,2889	0,4369	5,6038	0,17845	2,4483	0,40845	3,0464	1,2443
5	2,8153	0,3552	7,8926	0,12670	2,8035	0,35670	4,4672	1,5935
6	3,4628	0,2888	10,7079	0,09339	3,0923	0,32339	5,9112	1,9116
7	4,2593	0,2348	14,1708	0,07057	3,3270	0,30057	7,3198	2,2001
8	5,2389	0,1909	18,4300	0,05426	3,5179	0,28426	8,6560	2,4605
9	6,4439	0,1552	23,6690	0,04225	3,6731	0,27225	9,8975	2,6946
10	7,9259	0,1262	30,1128	0,03321	3,7993	0,26321	11,0330	2,9040
11	9,7489	0,1026	38,0388	0,02629	3,9018	0,25629	12,0588	3,0905
12	11,9912	0,0834	47,7877	0,02093	3,9852	0,25093	12,9761	3,2560
13	14,7491	0,0678	59,7788	0,01673	4,0530	0,24673	13,7897	3,4023
14	18,1414	0,0551	74,5280	0,01342	4,1082	0,24342	14,5063	3,5311
15	22,3140	0,0448	92,6694	0,01079	4,1530	0,24079	15,1337	3,6441
16	27,4462	0,0364	114,9834	0,00870	4,1894	0,23870	15,6802	3,7428
17	33,7588	0,0296	142,4295	0,00702	4,2190	0,23702	16,1542	3,8289
18	41,5233	0,0241	176,1883	0,00568	4,2431	0,23568	16,5636	3,9036
19	51,0737	0,0196	217,7116	0,00459	4,2627	0,23459	16,9160	3,9684
20	62,8206	0,0159	268,7853	0,00372	4,2786	0,23372	17,2185	4,0243
21	77,2694	0,0129	331,6059	0,00302	4,2916	0,23302	17,4773	4,0725
22	95,0413	0,0105	408,8753	0,00245	4,3021	0,23245	17,6983	4,1139
23	116,9008	0,0086	503,9166	0,00198	4,3106	0,23198	17,8865	4,1494
24	143,7880	0,0070	620,8174	0,00161	4,3176	0,23161	18,0464	4,1797
25	176,8593	0,0057	764,6054	0,00131	4,3232	0,23131	18,1821	4,2057
26	217,5369	0,0046	941,4647	0,00106	4,3278	0,23106	18,2970	4,2278
27	267,5704	0,0037	1159,0016	0,00086	4,3316	0,23086	18,3942	4,2465
28	329,1115	0,0030	1426,5719	0,00070	4,3346	0,23070	18,4763	4,2625
29	404,8072	0,0025	1755,6835	0,00057	4,3371	0,23057	18,5454	4,2760
30	497,9129	0,0020	2160,4907	0,00046	4,3391	0,23046	18,6037	4,2875
36	1724,1856	0,0006	7492,1113	0,00013	4,3453	0,23013	18,8018	4,3269
40	3946,4305	0,0003	17154,0456	0,00006	4,3467	0,23006	18,8547	4,3377
48	20674,9919	0,0000	89886,9215	0,00001	4,3476	0,23001	18,8926	4,3455
50	31279,1953	0,0000	135992,1536	0,00001	4,3477	0,23001	18,8960	4,3462
55	88060,4964		382867,3756	0,00000	4,3478	0,23000	18,9007	4,3472
60	247917,2160		1077896,5914		4,3478	0,23000	18,9025	4,3476
65	697962,7475		3034616,2935		4,3478	0,23000	18,9032	4,3477
70	1964978,4905		8543380,3934		4,3478	0,23000	18,9034	4,3478
75	5532015,1138		24052235,2772		4,3478	0,23000	18,9035	4,3478
80	15574313,5954		67714402,5887		4,3478	0,23000	18,9036	4,3478
85	43846453,5942		190636750,410		4,3478	0,23000	18,9036	4,3478

Factores de Interés Compuesto

24,00%								24,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,2400	0,8065	1,0000	1,00000	0,8065	1,24000			
2	1,5376	0,6504	2,2400	0,44643	1,4568	0,68643	0,6504	0,4464	
3	1,9066	0,5245	3,7776	0,26472	1,9813	0,50472	1,6993	0,8577	
4	2,3642	0,4230	5,6842	0,17593	2,4043	0,41593	2,9683	1,2346	
5	2,9316	0,3411	8,0484	0,12425	2,7454	0,36425	4,3327	1,5782	
6	3,6352	0,2751	10,9801	0,09107	3,0205	0,33107	5,7081	1,8898	
7	4,5077	0,2218	14,6153	0,06842	3,2423	0,30842	7,0392	2,1710	
8	5,5895	0,1789	19,1229	0,05229	3,4212	0,29229	8,2915	2,4236	
9	6,9310	0,1443	24,7125	0,04047	3,5655	0,28047	9,4458	2,6492	
10	8,5944	0,1164	31,6434	0,03160	3,6819	0,27160	10,4930	2,8499	
11	10,6571	0,0938	40,2379	0,02485	3,7757	0,26485	11,4313	3,0276	
12	13,2148	0,0757	50,8950	0,01965	3,8514	0,25965	12,2637	3,1843	
13	16,3863	0,0610	64,1097	0,01560	3,9124	0,25560	12,9960	3,3218	
14	20,3191	0,0492	80,4961	0,01242	3,9616	0,25242	13,6358	3,4420	
15	25,1956	0,0397	100,8151	0,00992	4,0013	0,24992	14,1915	3,5467	
16	31,2426	0,0320	126,0108	0,00794	4,0333	0,24794	14,6716	3,6376	
17	38,7408	0,0258	157,2534	0,00636	4,0591	0,24636	15,0846	3,7162	
18	48,0386	0,0208	195,9942	0,00510	4,0799	0,24510	15,4385	3,7840	
19	59,5679	0,0168	244,0328	0,00410	4,0967	0,24410	15,7406	3,8423	
20	73,8641	0,0135	303,6006	0,00329	4,1103	0,24329	15,9979	3,8922	
21	91,5915	0,0109	377,4648	0,00265	4,1212	0,24265	16,2162	3,9349	
22	113,5735	0,0088	469,0563	0,00213	4,1300	0,24213	16,4011	3,9712	
23	140,8312	0,0071	582,6298	0,00172	4,1371	0,24172	16,5574	4,0022	
24	174,6306	0,0057	723,4610	0,00138	4,1428	0,24138	16,6891	4,0284	
25	216,5420	0,0046	898,0916	0,00111	4,1474	0,24111	16,7999	4,0507	
26	268,5121	0,0037	1114,6336	0,00090	4,1511	0,24090	16,8930	4,0695	
27	332,9550	0,0030	1383,1457	0,00072	4,1542	0,24072	16,9711	4,0853	
28	412,8642	0,0024	1716,1007	0,00058	4,1566	0,24058	17,0365	4,0987	
29	511,9516	0,0020	2128,9648	0,00047	4,1585	0,24047	17,0912	4,1099	
30	634,8199	0,0016	2640,9164	0,00038	4,1601	0,24038	17,1369	4,1193	
36	2307,7070	0,0004	9611,2791	0,00010	4,1649	0,24010	17,2886	4,1511	
40	5455,9126	0,0002	22728,8026	0,00004	4,1659	0,24004	17,3274	4,1593	
48	30495,8602		127061,9174	0,00001	4,1665	0,24001	17,3540	4,1651	
50	46890,4346		195372,6442	0,00001	4,1666	0,24001	17,3563	4,1656	
55	137465,1733		572767,3888		4,1666	0,24000	17,3593	4,1663	
60	402996,3473		1679147,2802		4,1667	0,24000	17,3604	4,1665	
65	1181434,1917		4922638,2987		4,1667	0,24000	17,3609	4,1666	
70	3463522,0859		14431337,8580		4,1667	0,24000	17,3610	4,1666	
75	10153748,1512		42307279,7968		4,1667	0,24000	17,3611	4,1667	
80	29766982,5575		124029089,8228		4,1667	0,24000	17,3611	4,1667	
85	87265632,0975		363606796,2397		4,1667	0,24000	17,3611	4,1667	

Factores de Interés Compuesto								
25,00%								25,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,2500	0,8000	1,0000	1,00000	0,8000	1,25000		
2	1,5625	0,6400	2,2500	0,44444	1,4400	0,69444	0,6400	0,4444
3	1,9531	0,5120	3,8125	0,26230	1,9520	0,51230	1,6640	0,8525
4	2,4414	0,4096	5,7656	0,17344	2,3616	0,42344	2,8928	1,2249
5	3,0518	0,3277	8,2070	0,12185	2,6893	0,37185	4,2035	1,5631
6	3,8147	0,2621	11,2588	0,08882	2,9514	0,33882	5,5142	1,8683
7	4,7684	0,2097	15,0735	0,06634	3,1611	0,31634	6,7725	2,1424
8	5,9605	0,1678	19,8419	0,05040	3,3289	0,30040	7,9469	2,3872
9	7,4506	0,1342	25,8023	0,03876	3,4631	0,28876	9,0207	2,6048
10	9,3132	0,1074	33,2529	0,03007	3,5705	0,28007	9,9870	2,7971
11	11,6415	0,0859	42,5661	0,02349	3,6564	0,27349	10,8460	2,9663
12	14,5519	0,0687	54,2077	0,01845	3,7251	0,26845	11,6020	3,1145
13	18,1899	0,0550	68,7596	0,01454	3,7801	0,26454	12,2617	3,2437
14	22,7374	0,0440	86,9495	0,01150	3,8241	0,26150	12,8334	3,3559
15	28,4217	0,0352	109,6868	0,00912	3,8593	0,25912	13,3260	3,4530
16	35,5271	0,0281	138,1085	0,00724	3,8874	0,25724	13,7482	3,5366
17	44,4089	0,0225	173,6357	0,00576	3,9099	0,25576	14,1085	3,6084
18	55,5112	0,0180	218,0446	0,00459	3,9279	0,25459	14,4147	3,6698
19	69,3889	0,0144	273,5558	0,00366	3,9424	0,25366	14,6741	3,7222
20	86,7362	0,0115	342,9447	0,00292	3,9539	0,25292	14,8932	3,7667
21	108,4202	0,0092	429,6809	0,00233	3,9631	0,25233	15,0777	3,8045
22	135,5253	0,0074	538,1011	0,00186	3,9705	0,25186	15,2326	3,8365
23	169,4066	0,0059	673,6264	0,00148	3,9764	0,25148	15,3625	3,8634
24	211,7582	0,0047	843,0329	0,00119	3,9811	0,25119	15,4711	3,8861
25	264,6978	0,0038	1054,7912	0,00095	3,9849	0,25095	15,5618	3,9052
26	330,8722	0,0030	1319,4890	0,00076	3,9879	0,25076	15,6373	3,9212
27	413,5903	0,0024	1650,3612	0,00061	3,9903	0,25061	15,7002	3,9346
28	516,9879	0,0019	2063,9515	0,00048	3,9923	0,25048	15,7524	3,9457
29	646,2349	0,0015	2580,9394	0,00039	3,9938	0,25039	15,7957	3,9551
30	807,7936	0,0012	3227,1743	0,00031	3,9950	0,25031	15,8316	3,9628
36	3081,4879	0,0003	12321,9516	0,00008	3,9987	0,25008	15,9481	3,9883
40	7523,1638	0,0001	30088,6554	0,00003	3,9995	0,25003	15,9766	3,9947
48	44841,5509		179362,2034	0,00001	3,9999	0,25001	15,9954	3,9989
50	70064,9232		280255,6929		3,9999	0,25000	15,9969	3,9993
55	213821,1768		855280,7072		4,0000	0,25000	15,9989	3,9997
60	652530,4468		2610117,7872		4,0000	0,25000	15,9996	3,9999
65	1991364,8889		7965455,5557		4,0000	0,25000	15,9999	4,0000
70	6077163,3573		24308649,4291		4,0000	0,25000	16,0000	4,0000
75	18546030,7534		74184119,0137		4,0000	0,25000	16,0000	4,0000
80	56597994,2427		226391972,9707		4,0000	0,25000	16,0000	4,0000
85	172723371,1019		690893480,4076		4,0000	0,25000	16,0000	4,0000

Factores de Interés Compuesto

30,00%								30,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,3000	0,7692	1,0000	1,00000	0,7692	1,30000			
2	1,6900	0,5917	2,3000	0,43478	1,3609	0,73478	0,5917	0,4348	
3	2,1970	0,4552	3,9900	0,25063	1,8161	0,55063	1,5020	0,8271	
4	2,8561	0,3501	6,1870	0,16163	2,1662	0,46163	2,5524	1,1783	
5	3,7129	0,2693	9,0431	0,11058	2,4356	0,41058	3,6297	1,4903	
6	4,8268	0,2072	12,7560	0,07839	2,6427	0,37839	4,6656	1,7654	
7	6,2749	0,1594	17,5828	0,05687	2,8021	0,35687	5,6218	2,0063	
8	8,1573	0,1226	23,8577	0,04192	2,9247	0,34192	6,4800	2,2156	
9	10,6045	0,0943	32,0150	0,03124	3,0190	0,33124	7,2343	2,3963	
10	13,7858	0,0725	42,6195	0,02346	3,0915	0,32346	7,8872	2,5512	
11	17,9216	0,0558	56,4053	0,01773	3,1473	0,31773	8,4452	2,6833	
12	23,2981	0,0429	74,3270	0,01345	3,1903	0,31345	8,9173	2,7952	
13	30,2875	0,0330	97,6250	0,01024	3,2233	0,31024	9,3135	2,8895	
14	39,3738	0,0254	127,9125	0,00782	3,2487	0,30782	9,6437	2,9685	
15	51,1859	0,0195	167,2863	0,00598	3,2682	0,30598	9,9172	3,0344	
16	66,5417	0,0150	218,4722	0,00458	3,2832	0,30458	10,1426	3,0892	
17	86,5042	0,0116	285,0139	0,00351	3,2948	0,30351	10,3276	3,1345	
18	112,4554	0,0089	371,5180	0,00269	3,3037	0,30269	10,4788	3,1718	
19	146,1920	0,0068	483,9734	0,00207	3,3105	0,30207	10,6019	3,2025	
20	190,0496	0,0053	630,1655	0,00159	3,3158	0,30159	10,7019	3,2275	
21	247,0645	0,0040	820,2151	0,00122	3,3198	0,30122	10,7828	3,2480	
22	321,1839	0,0031	1067,2796	0,00094	3,3230	0,30094	10,8482	3,2646	
23	417,5391	0,0024	1388,4635	0,00072	3,3254	0,30072	10,9009	3,2781	
24	542,8008	0,0018	1806,0026	0,00055	3,3272	0,30055	10,9433	3,2890	
25	705,6410	0,0014	2348,8033	0,00043	3,3286	0,30043	10,9773	3,2979	
26	917,3333	0,0011	3054,4443	0,00033	3,3297	0,30033	11,0045	3,3050	
27	1192,5333	0,0008	3971,7776	0,00025	3,3305	0,30025	11,0263	3,3107	
28	1550,2933	0,0006	5164,3109	0,00019	3,3312	0,30019	11,0437	3,3153	
29	2015,3813	0,0005	6714,6042	0,00015	3,3317	0,30015	11,0576	3,3189	
30	2619,9956	0,0004	8729,9855	0,00011	3,3321	0,30011	11,0687	3,3219	
36	12646,2186	0,0001	42150,7285	0,00002	3,3331	0,30002	11,1007	3,3305	
40	36118,8648		120392,8827	0,00001	3,3332	0,30001	11,1071	3,3322	
48	294632,6763		982105,5877		3,3333	0,30000	11,1105	3,3332	
50	497929,2230		1659760,7433		3,3333	0,30000	11,1108	3,3332	
55	1848776,3499		6162584,4996		3,3333	0,30000	11,1110	3,3333	
60	6864377,1727		22881253,9091		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	
65	25486951,9360		84956503,1200		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	
70	94631268,4517		315437558,1724		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	
75	351359275,5725		1171197581,9083		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	
80	1304572395,0513		4348574646,84		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	
85	4843785982,7579		16145953272,53		3,3333	0,30000	11,1111	3,3333	

Factores de Interés Compuesto								
35,00%						35,00%		
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,3500	0,7407	1,0000	1,00000	0,7407	1,35000		
2	1,8225	0,5487	2,3500	0,42553	1,2894	0,77553	0,5487	0,4255
3	2,4604	0,4064	4,1725	0,23966	1,6959	0,58966	1,3616	0,8029
4	3,3215	0,3011	6,6329	0,15076	1,9969	0,50076	2,2648	1,1341
5	4,4840	0,2230	9,9544	0,10046	2,2200	0,45046	3,1568	1,4220
6	6,0534	0,1652	14,4384	0,06926	2,3852	0,41926	3,9828	1,6698
7	8,1722	0,1224	20,4919	0,04880	2,5075	0,39880	4,7170	1,8811
8	11,0324	0,0906	28,6640	0,03489	2,5982	0,38489	5,3515	2,0597
9	14,8937	0,0671	39,6964	0,02519	2,6653	0,37519	5,8886	2,2094
10	20,1066	0,0497	54,5902	0,01832	2,7150	0,36832	6,3363	2,3338
11	27,1439	0,0368	74,6967	0,01339	2,7519	0,36339	6,7047	2,4364
12	36,6442	0,0273	101,8406	0,00982	2,7792	0,35982	7,0049	2,5205
13	49,4697	0,0202	138,4848	0,00722	2,7994	0,35722	7,2474	2,5889
14	66,7841	0,0150	187,9544	0,00532	2,8144	0,35532	7,4421	2,6443
15	90,1585	0,0111	254,7385	0,00393	2,8255	0,35393	7,5974	2,6889
16	121,7139	0,0082	344,8970	0,00290	2,8337	0,35290	7,7206	2,7246
17	164,3138	0,0061	466,6109	0,00214	2,8398	0,35214	7,8180	2,7530
18	221,8236	0,0045	630,9247	0,00158	2,8443	0,35158	7,8946	2,7756
19	299,4619	0,0033	852,7483	0,00117	2,8476	0,35117	7,9547	2,7935
20	404,2736	0,0025	1152,2103	0,00087	2,8501	0,35087	8,0017	2,8075
21	545,7693	0,0018	1556,4838	0,00064	2,8519	0,35064	8,0384	2,8186
22	736,7886	0,0014	2102,2532	0,00048	2,8533	0,35048	8,0669	2,8272
23	994,6646	0,0010	2839,0418	0,00035	2,8543	0,35035	8,0890	2,8340
24	1342,7973	0,0007	3833,7064	0,00026	2,8550	0,35026	8,1061	2,8393
25	1812,7763	0,0006	5176,5037	0,00019	2,8556	0,35019	8,1194	2,8433
26	2447,2480	0,0004	6989,2800	0,00014	2,8560	0,35014	8,1296	2,8465
27	3303,7848	0,0003	9436,5280	0,00011	2,8563	0,35011	8,1374	2,8490
28	4460,1095	0,0002	12740,3128	0,00008	2,8565	0,35008	8,1435	2,8509
29	6021,1478	0,0002	17200,4222	0,00006	2,8567	0,35006	8,1481	2,8523
30	8128,5495	0,0001	23221,5700	0,00004	2,8568	0,35004	8,1517	2,8535
36	49205,7285		140584,9385	0,00001	2,8571	0,35001	8,1610	2,8564
40	163437,1347		466960,3848		2,8571	0,35000	8,1625	2,8569
48	1803104,4606		5151724,1732		2,8571	0,35000	8,1632	2,8571
50	3286157,8795		9389019,6556		2,8571	0,35000	8,1632	2,8571
55	14735241,8124		42100688,04		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
60	66073316,9964		188780902,85		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
65	296274962,7384		846499890,68		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
70	1328506839,6132		3795733824,61		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
75	5957069090,77		17020197399,35		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
80	26711696992,52		76319134261,50		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571
85	119776142486,85		342217549959,57		2,8571	0,35000	8,1633	2,8571

Factores de Interés Compuesto

40,00%		Factores de Interés Compuesto						40,00%	
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos		
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente	
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G	
1	1,4000	0,7143	1,0000	1,00000	0,7143	1,40000			
2	1,9600	0,5102	2,4000	0,41667	1,2245	0,81667	0,5102	0,4167	
3	2,7440	0,3644	4,3600	0,22936	1,5889	0,62936	1,2391	0,7798	
4	3,8416	0,2603	7,1040	0,14077	1,8492	0,54077	2,0200	1,0923	
5	5,3782	0,1859	10,9456	0,09136	2,0352	0,49136	2,7637	1,3580	
6	7,5295	0,1328	16,3238	0,06126	2,1680	0,46126	3,4278	1,5811	
7	10,5414	0,0949	23,8534	0,04192	2,2628	0,44192	3,9970	1,7664	
8	14,7579	0,0678	34,3947	0,02907	2,3306	0,42907	4,4713	1,9185	
9	20,6610	0,0484	49,1526	0,02034	2,3790	0,42034	4,8585	2,0422	
10	28,9255	0,0346	69,8137	0,01432	2,4136	0,41432	5,1696	2,1419	
11	40,4957	0,0247	98,7391	0,01013	2,4383	0,41013	5,4166	2,2215	
12	56,6939	0,0176	139,2348	0,00718	2,4559	0,40718	5,6106	2,2845	
13	79,3715	0,0126	195,9287	0,00510	2,4685	0,40510	5,7618	2,3341	
14	111,1201	0,0090	275,3002	0,00363	2,4775	0,40363	5,8788	2,3729	
15	155,5681	0,0064	386,4202	0,00259	2,4839	0,40259	5,9688	2,4030	
16	217,7953	0,0046	541,9883	0,00185	2,4885	0,40185	6,0376	2,4262	
17	304,9135	0,0033	759,7837	0,00132	2,4918	0,40132	6,0901	2,4441	
18	426,8789	0,0023	1064,6971	0,00094	2,4941	0,40094	6,1299	2,4577	
19	597,6304	0,0017	1491,5760	0,00067	2,4958	0,40067	6,1601	2,4682	
20	836,6826	0,0012	2089,2064	0,00048	2,4970	0,40048	6,1828	2,4761	
21	1171,3556	0,0009	2925,8889	0,00034	2,4979	0,40034	6,1998	2,4821	
22	1639,8978	0,0006	4097,2445	0,00024	2,4985	0,40024	6,2127	2,4866	
23	2295,8569	0,0004	5737,1423	0,00017	2,4989	0,40017	6,2222	2,4900	
24	3214,1997	0,0003	8032,9993	0,00012	2,4992	0,40012	6,2294	2,4925	
25	4499,8796	0,0002	11247,1990	0,00009	2,4994	0,40009	6,2347	2,4944	
26	6299,8314	0,0002	15747,0785	0,00006	2,4996	0,40006	6,2387	2,4959	
27	8819,7640	0,0001	22046,9099	0,00005	2,4997	0,40005	6,2416	2,4969	
28	12347,6696	0,0001	30866,6739	0,00003	2,4998	0,40003	6,2438	2,4977	
29	17286,7374	0,0001	43214,3435	0,00002	2,4999	0,40002	6,2454	2,4983	
30	24201,4324		60501,0809	0,00002	2,4999	0,40002	6,2466	2,4988	
36	182225,5562		455561,3904		2,5000	0,40000	6,2495	2,4998	
40	700037,6966		1750091,7415		2,5000	0,40000	6,2498	2,4999	
48	10331079,7142		25827696,7854		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
50	20248916,2398		50622288,0994		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
55	108903531,2774		272258825,6934		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
60	585709328,0571		1464273317,6427		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
65	3150085336,5298		7875213338,8245		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
70	16941914960,3379		42354787398,34		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
75	91117684716,2879		227794211788,22		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
80	490052776648,53		1225131941618,82		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	
85	2635621445482,18		6589053613703,0		2,5000	0,40000	6,2500	2,5000	

Factores de Interés Compuesto								
50,00%								50,00%
n	Pagos únicos		Pagos de Anualidades				Gradientes aritméticos	
	Cantidad compuesta	Valor Presente	Cantidad Compuesta	Fondo de Amortización	Valor Presente	Recuperación de Capital	Valor Presente	Anualidad de Gradiente
	F/P	P/F	F/A	A/F	P/A	A/P	P/G	A/G
1	1,5000	0,6667	1,0000	1,00000	0,6667	1,50000		
2	2,2500	0,4444	2,5000	0,40000	1,1111	0,90000	0,4444	0,4000
3	3,3750	0,2963	4,7500	0,21053	1,4074	0,71053	1,0370	0,7368
4	5,0625	0,1975	8,1250	0,12308	1,6049	0,62308	1,6296	1,0154
5	7,5938	0,1317	13,1875	0,07583	1,7366	0,57583	2,1564	1,2417
6	11,3906	0,0878	20,7813	0,04812	1,8244	0,54812	2,5953	1,4226
7	17,0859	0,0585	32,1719	0,03108	1,8829	0,53108	2,9465	1,5648
8	25,6289	0,0390	49,2578	0,02030	1,9220	0,52030	3,2196	1,6752
9	38,4434	0,0260	74,8867	0,01335	1,9480	0,51335	3,4277	1,7596
10	57,6650	0,0173	113,3301	0,00882	1,9653	0,50882	3,5838	1,8235
11	86,4976	0,0116	170,9951	0,00585	1,9769	0,50585	3,6994	1,8713
12	129,7463	0,0077	257,4927	0,00388	1,9846	0,50388	3,7842	1,9068
13	194,6195	0,0051	387,2390	0,00258	1,9897	0,50258	3,8459	1,9329
14	291,9293	0,0034	581,8585	0,00172	1,9931	0,50172	3,8904	1,9519
15	437,8939	0,0023	873,7878	0,00114	1,9954	0,50114	3,9224	1,9657
16	656,8408	0,0015	1311,6817	0,00076	1,9970	0,50076	3,9452	1,9756
17	985,2613	0,0010	1968,5225	0,00051	1,9980	0,50051	3,9614	1,9827
18	1477,8919	0,0007	2953,7838	0,00034	1,9986	0,50034	3,9729	1,9878
19	2216,8378	0,0005	4431,6756	0,00023	1,9991	0,50023	3,9811	1,9914
20	3325,2567	0,0003	6648,5135	0,00015	1,9994	0,50015	3,9868	1,9940
21	4987,8851	0,0002	9973,7702	0,00010	1,9996	0,50010	3,9908	1,9958
22	7481,8276	0,0001	14961,6553	0,00007	1,9997	0,50007	3,9936	1,9971
23	11222,7415	0,0001	22443,4829	0,00004	1,9998	0,50004	3,9955	1,9980
24	16834,1122	0,0001	33666,2244	0,00003	1,9999	0,50003	3,9969	1,9986
25	25251,1683		50500,3366	0,00002	1,9999	0,50002	3,9979	1,9990
26	37876,7524		75751,5049	0,00001	1,9999	0,50001	3,9985	1,9993
27	56815,1287		113628,2573	0,00001	2,0000	0,50001	3,9990	1,9995
28	85222,6930		170443,3860	0,00001	2,0000	0,50001	3,9993	1,9997
29	127834,0395		255666,0790	0,00000	2,0000	0,50000	3,9995	1,9998
30	191751,0592		383500,1185		2,0000	0,50000	3,9997	1,9998
36	2184164,4091		4368326,8181		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
40	11057332,3209		22114662,6419		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
48	283387333,43		566774664,857		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
50	637621500,21		1275242998,43		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
55	4841938267,25		9683876532,50		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
60	36768468716,93		73536937431,87		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
65	279210559319,21		558421118636,42		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
70	2120255184830,25		4240510369658,50		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
75	16100687809804,7		32201375619607,40		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
80	122264598055705		244529196111407		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000
85	928446791485507		1856893582971010		2,0000	0,50000	4,0000	2,0000

Referencias

- Blank, L., y Tarquin, A. (2012). *Ingeniería Económica*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Cabeza de Vergara, L., y Castrillón, J. (2013). *Matemáticas Financieras*. Bogotá, Colombia: Ediciones de la U.
- Díaz, A., y Aguilera, V. (2014). *Matemáticas Financieras*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Diez de Castro, L., y Mascareñas, J. (1994). *Ingeniería Financiera*. Madrid, España: McGraw-Hill.
- Flórez, J. (2012). *Matemáticas Financieras Empresariales*. Bogotá, Colombia: Ecoe.
- Gitman, L., y Zutter, C. (2012). *Principios de Administración Financiera*. México D.F., México: Pearson.
- Lasa, A. (s. f.). *Operaciones Financieras a Interés Compuesto*. Recuperado de www.oocities.org/ajlasa/mfinyar/nota2.pdf
- Meza, J. (2015). *Matemáticas Financieras Aplicadas*. Bogotá, Colombia: Ecoe.
- Netfci, S. (2008). *Ingeniería Financiera*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Portus G. (1997). *Matemáticas Financieras*. Bogotá, Colombia: McGraw-Hill.
- Ross, S., y Westerfield, R. (2010). *Fundamentos de Finanzas Corporativas*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Ross, S., y Westerfield, R. (2012). *Finanzas Corporativas*. México D.F., México: McGraw-Hill.
- Villalobos, J. (2012). *Matemáticas Financieras*. México D.F., México: Pearson.



Guido Mantilla Buenaño

Es profesor e investigador a tiempo completo en la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil. Dicta las cátedras de: Métodos Cuantitativos, Matemáticas Financieras, Estadística, entre otras.

Ha sido catedrático en otras Instituciones como: Jefferson International University, Universidad de Guayaquil, Tecnológico Ecotec y Tecnológico Naval – Armada del Ecuador.

Obtuvo su título de Ingeniero en Sistemas con estudios en Gestión Empresarial en la Escuela Superior Politécnica del Litoral – ESPOL. Posee una Maestría en Dirección de Empresas de la ESPOL y una Maestría en Gestión Educativa de la Universidad Técnica Particular de Loja - UTPL. Cursó también un Diplomado en Pedagogías Innovadoras en la UTPL. Ha asistido a varias decenas de seminarios sobre Administración, Educación y otros temas.

Ha sido Coordinador del Área de Métodos Cuantitativos en Instituciones Educativas e Ingeniero de Procesos en algunas firmas. En una de ellas se desempeñó en la categoría Señor.



Fernando Dávila Medina

Se desempeña como Docente-Investigador en la Universidad Laica VICENTE ROCAFUERTE de Guayaquil. Dicta las cátedras de Administración Estratégica y Técnicas de la Investigación. Ha sido docente de la Universidad de Especialidades Espíritu Santo. Es capacitador privado en diversas empresas. Obtuvo su M.B.A. en la universidad de Saint Thomas en la ciudad de Houston, TX. Y su B.A. en la Universidad Internacional de Houston. Posee un Diplomado en Estadística e

Investigación Científica avalado por la Sociedad Hispana de Investigadores Científicos. Es autor de diversos artículos de investigación. Tiene a su cargo “Enfoque Administrativo, el boletín” de la Facultad de Administración de la ULVR y forma parte de la Unidad de Titulación de la misma universidad. Actualmente cursa sus estudios de doctorado en la Universidad Nacional de Cuyo en la República Argentina.